تلاشی در مسیر موفقیت

ترنج بوک

- دانلود گام به گام تمام دروس
- دانلود آزمون های قلم چی و گاج + پاسخنامه
- دانلود جزوه های آموزشی و شب امتحانی
- دانلود نمونه سوالات امتحانی
- مشاوره کنکور
- فیلم های انگیزشی

Www.ToranjBook.Net

ToranjBook_Net

ToranjBook_Net

دفترچه پاسخ

آزمون ۱۸ اسفند ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲ وریاضی‌پایه	کاظم اجلالی-مسعود برملا-شاهین پروازی-سعید تن‌آرا-میلاد چاشمی-عادل حسینی-طاهر دادستانی-محمدرضا راسخ علی شهرابی-رضا طاری حمید علیزاده-کامیار علّییون-حامد معنوی-جهانبخش نیکنام
	هندسه	علی ایمانی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-مهدیار راشدی-سوگند روشنی-فرشاد صدیقی‌فر-هومن عقیلی-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	آماروریاضیات گسسته	اسحاق اسفندیار-علی ایمانی-فرزاد جوادی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-کیوان دارابی-مصطفی دیداری مهدیار راشدی-سوگند روشنی-احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی
	فیزیک	کامران ابراهیمی-مهران اسماعیلی-عباس اصغری-علی برزگر-علیرضا جباری-دانیال راستی-فراز رسولی-محمدجواد سورچی معصومه شریعت‌ناصری-محمدرضا شریفی-پوریا علاقه‌مند-آراس محمدی-محمدکاظم منشادی-محمود منصوری امیراحمد میرسعید-سیده ملیحه میرصالحی-حسام نادری-مجتبی نکوئیان-محمد نهاوندی‌مقدم
	شیمی	محمدرضا پورجاوید-امیر حاتمیان-پیمان خواجوی‌مجد-حمید ذبحی-روزبه رضوانی-امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره امیرمحمد کنگرانی-علیرضا کیانی‌دوست-رضا مسکن-امیرحسین مسلمی-هادی مهدی‌زاده-میلاد میرحیدری

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲ و ریاضی‌پایه	هندسه	آماروریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	عادل حسینی	محمد صحت‌کار	امیرحسین ابومحبوب کیوان دارابی	حسام نادری	امیرحسین مسلمی
گروه ویراستاری	سعید خان‌بابایی محمدرضا راسخ	مهرداد ملوندی امیرمحمد کریمی	مهرداد ملوندی امیرمحمد کریمی	زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم امیرحسین مسلمی میلاد میرحیدری
ویراستاری رتبه های برتر	پارسا نوروزی‌منش	پارسا نوروزی‌منش	پارسا نوروزی‌منش	حسین بصیرترکمبور	علی رضایی احسان پنجه‌شاهی مهدی سهامی
مسئول درس	عادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	پارسا عیوض‌پور
مستندسازی	سمیه اسکندری	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین مرتضوی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

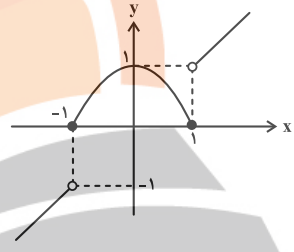
۱- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

تابع $y=|f(x)|$ در ریشه‌های سادهٔ $f(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۸۶ و ۸۷)

۲- **گزینهٔ «۳»** (سعید تن‌آرا)

بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در $x=۰$ ماکزیمم نسبی و در $x=۱$ مینیمم نسبی دارد.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۳- **گزینهٔ «۴»** (طاهر دارستانی)

مساحت یک لوزی به طول ضلع ℓ که یکی از زوایای آن θ است، از رابطهٔ $S=\ell^۲\sin\theta$ به دست می‌آید. پس در این سؤال داریم:

$$S(\alpha)=۴\sin\alpha$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق تابع است:

$$S'(\alpha)=۴\cos\alpha \Rightarrow S'(\frac{۲\pi}{۳})=۴\cos\frac{۲\pi}{۳}=-۲$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۴- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا راسخ)

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x+\frac{۱}{x})^۲-۲+۳}{x+\frac{۱}{x}}=x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+\frac{۱}{x}}$$

پس اگر $h(x)=x+\frac{۱}{x}$ باشد، $f(x)=(hoh)(x)$ است و داریم:

$$f'(x)=h'(x)h'(h(x))\xrightarrow{x=۲}f'(۲)=h'(۲)h'(h(۲))$$

$h(۲)=\frac{۵}{۲}$ است و داریم:

$$f'(۲)=h'(۲)h'(\frac{۵}{۲})$$

مشتق تابع h نیز $h'(x)=۱-\frac{۱}{x^۲}$ است.

$$h'(۲)=\frac{۳}{۴}\ ,\quad h'(\frac{۵}{۲})=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۶۳}{۱۰۰}$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۵- **گزینهٔ «۲»** (مسعود برملا)

تابع $y=[۳x-۲]$ در $x=۲$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، پس برای این که f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، لازم است که $x=۲$ صفر مرتبهٔ دوم تابع $h(x)=ax+b\sqrt{۲x}+۲$ باشد؛ یعنی $h(۲)=h'(۲)=۰$ باشد.

$$h(۲)=۲a+۲b+۲=۰\Rightarrow a+b=-۱ \qquad (۱)$$

$$h'(x)=a+\frac{b}{\sqrt{۲x}}\xrightarrow{x=۲}h'(۲)=a+\frac{b}{۲}=۰ \qquad (۲)$$

از معادلات (۱) و (۲) به دست می‌آید:

$$a=۱\ ,\quad b=-۲\Rightarrow a-۲b=۵$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۶- **گزینهٔ «۴»** (حمید علیزاده)

وقتی $x\to۰$ حد مخرج برابر صفر است، بنابراین حد صورت نیز باید برابر صفر شود:

$$f(۱)=g(۱)$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$L=\lim_{x\to۰}\frac{f(۱-x)-g(۱-x)}{x+x^۲}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{f(۱-x)-f(۱)-(g(۱-x)-g(۱))}{x+x^۲}$$

$$=(\lim_{x\to۰}\frac{f(۱-x)-f(۱)}{x}-\lim_{x\to۰}\frac{g(۱-x)-g(۱)}{x})\lim_{x\to۰}\frac{۱}{۱+x}$$

$$=-(f'(۱)-g'(۱))=۲\Rightarrow f'(۱)-g'(۱)=-۲$$

تلاش در مسیر موفقیت

حال از تابع $y = f(2x) - g(2x)$ مشتق می‌گیریم:

$$y' = 2f'(2x) - 2g'(2x) \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y' = 2(f'(1) - g'(1)) = -4$$

(حسابان ۲- مشتق؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰ و ۹۶)

۷- **گزینهٔ «۳»** (سعید تن‌آرا)

$$y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

بدیهی است که تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است و از طرفی در $x = \pm 1$ دارای مشتق صفر است، پس $x = 1$ تنها نقطهٔ بحرانی محدودهٔ xهای مثبت است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحهٔ ۱۱۷)

۸- **گزینهٔ «۲»** (سعید تن‌آرا)

$$f(-2) = -\frac{8}{3} \quad , \quad f(2) = \frac{8}{3}$$

نقاط بحرانی عضو بازهٔ $(-2\ ,\ 2)$ را نیز پیدا می‌کنیم.

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x \xrightarrow{f'(x)=0} x(x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0\ ,\ -2\ ,\ 1$$

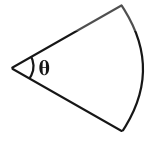
که $x = 0$ و $x = 1$ درون بازهٔ مورد نظر قرار دارد. مقادیر تابع در این دو نقطه را نیز حساب می‌کنیم:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = -\frac{5}{12}$$

در نتیجه برد تابع بازهٔ $[-\frac{8}{3}\ ,\ \frac{8}{3}]$ است که طول این بازه برابر $\frac{16}{3}$ است.

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۸)

۹- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا راسخ)



محیط قطاع بالا برابر ℓ است. اگر شعاع دایره را r در نظر بگیریم، داریم:

$$P_{\text{قطاع}} = 2r + r\theta = r(2 + \theta) = \ell$$

از طرفی مساحت قطاع از رابطهٔ $S = \frac{1}{2}\theta r^2$ به دست می‌آید.

$$S(r) = \frac{1}{2}(\frac{\ell}{r} - 2)r^2 = \frac{1}{2}\ell r - r^2$$

در جواب معادلهٔ $S'(r) = 0$، S بیشترین مقدار خود را دارد.

$$S'(r) = \frac{1}{2}\ell - 2r \xrightarrow{S'(r)=0} r = \frac{\ell}{4}$$

$$\Rightarrow S_{max} = S(\frac{\ell}{4}) = \frac{1}{16}\ell^2$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (کاظم اجلالی)

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در بازهٔ $(0, \pi)$ به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 : \text{در بازهٔ } (0,\pi) \text{ جواب ندارد} \\ \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in (0,\pi)} x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس $x = \frac{\pi}{3}$ تنها نقطهٔ بحرانی تابع در بازهٔ $(0, \pi)$ است. حال مقادیر تابع را در این نقطه و هم‌چنین ابتدا و انتهای بازهٔ $[0, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$f(0) = m + 1, f(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4} + m\ ,\ f(\pi) = -1 + m$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع در بازهٔ گفته شده برابر $\frac{5}{4} + m$ و مینیمم مطلق آن $-1 + m$ است.

پس داریم:

$$\frac{5}{4} + m - 1 + m = 2m + \frac{1}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

(حسابان ۲- کاربردهای مشتق؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۱۹)

تلاشی در مسیر موفقیت

حسابان ۲- پیشروی سریع

۱۱- **گزینهٔ «۲»** (عادل حسینی)

ریشه‌های سادهٔ f'، اکسترمم‌های نسبی تابع f و اکسترمم‌های نسبی تابع f'، نقاط عطف تابع f هستند. بنابراین تابع f، ۳ عطف دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۱۲- **گزینهٔ «۴»** (علی شهرابی)

خط مماس افقی است: $f'(x)=5x^4-18x^2-4x \Rightarrow f'(0)=0$

تقعر رو به بالاست: $f''(x)=20x^3-36x-4 \Rightarrow f''(0)=-4<0$

پس نمودار گزینهٔ «۴» درست است. البته با استفاده از هم‌ارزی کم‌توان می‌توان گفت که نمودار تابع مورد در همسایگی $x=0$ شبیه نمودار تابع $y=-2x^2$ است.

(حسابان ۲- صفحهٔ ۱۳۸)

۱۳- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

مشتق‌های اول و دوم تابع به صورت زیر است:

$$y'=\frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad y''=-\frac{2}{(1+x)^3}$$

واضح است که y' در هر بازه از دامنه‌اش مثبت و در نتیجه تابع اکیداً صعودی است. جهت تقعر هم برای $x<-1$ و $x>-1$ متفاوت است. همچنین مرکز تقارن تابع هموگرافیک محل تقاطع مجانب‌های آن است که در این سؤال نقطهٔ $(-1,1)$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

مشتق دوم باید مثبت باشد:

$$y'=x+\frac{16}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow y''=1-\frac{8}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$\xrightarrow{y''>0} \frac{8}{\sqrt{(x+1)^3}}<1 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^3}>8$$

$$\Rightarrow x+1>4 \Rightarrow x>3$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۳۰)

۱۵- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا راسخ)

$f(0)$ یعنی همان d برابر ۱ است.

$x=\pm 1$ طول نقاط اکسترمم تابع و $x=0$ طول نقطه عطف با مماس مایل آن است.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad , \quad f''(x)=6ax+2b$$

$$f''(0)=0 \Rightarrow b=0$$

$$f'(\pm 1)=3a+c=0 \Rightarrow c=-3a$$

$$\Rightarrow f(x)=ax^3-3ax+1 \xrightarrow{f(1)=-1} a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-3x+1$$

در $x=-1$ ماکزیمم نسبی تابع با مقدار $f(-1)=3$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۱۶- **گزینهٔ «۲»** (کامیار علّیون)

ابتدا مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2\cos 2x-\sin x \Rightarrow f''(x)=-4\sin 2x-\cos x$$

$$\Rightarrow f''(x)=-8\sin x\cos x-\cos x \Rightarrow f''(x)=-\cos x(8\sin x+1)$$

ریشه‌های سادهٔ f'' طول نقاط عطف هستند.

$$\Rightarrow \cos x(8\sin x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ \sin x=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

در بازهٔ $(-\pi,0)$ معادلهٔ $\cos x=0$ جواب $x=-\frac{\pi}{2}$ و معادلهٔ $\sin x=-\frac{1}{8}$ دو جواب دارد. پس تابع f در این بازه ۳ نقطهٔ عطف دارد.

دقت کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق اول و دوم دارد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱۷- **گزینهٔ «۱»** (میلاد چاشمی)

در ابتدا، مختصات نقطهٔ داده شده باید در ضابطهٔ تابع صدق کند:

$$\Rightarrow ۲=\frac{b}{a-۱}\Rightarrow b=۲(a-۱) \quad (*)$$

حال مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم که $x=\sqrt[۳]{a}$ ریشهٔ آن باشد:

$$y'=-۳b\frac{x^۲}{(x^۳-۱)^۲}\Rightarrow y''=۶b\frac{x(۲x^۳+۱)}{(x^۳-۱)^۳}$$

$$\xrightarrow{y''=۰}\begin{cases}\sqrt[۳]{a}=۰\Rightarrow a=۰\xrightarrow{(*)}b=-۲\\ ۲(\sqrt[۳]{a})^۳+۱=۲a+۱=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\xrightarrow{(*)}b=-۳\end{cases}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱۸- **گزینهٔ «۴»** (عادل حسینی)

باید ضابطهٔ توابع f' و f'' را به دست آوریم:

$$f'=\frac{۲x^۲+۱}{\sqrt{x^۲+۱}}\Rightarrow f''(x)=\frac{x(۲x^۲+۳)}{\sqrt{(x^۲+۱)^۳}}$$

تنها نقطه عطف تابع f، نقطهٔ $x=۰$ است که شیب مماس بر نمودار تابع f در آن برابر $f'(۰)=۱$ است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۱۹- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

یعنی معادلهٔ $x^۳+ax-۱=۰$ فقط یک جواب دارد و این با فرض $h(x)=x^۳+ax-۱$، در حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

الف) تابع h اکیداً صعودی باشد:

$$h'(x)=۳x^۲+a\geq ۰\Rightarrow a\geq ۰$$

ب) مقادیر اکسترمم‌های تابع h هم‌علامت باشند:

$$\xrightarrow{a<۰}h'(x)=۳x^۲+a=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{a}{۳}}$$

$$\Rightarrow h(-\sqrt{-\frac{a}{۳}})=\frac{-۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}-۱\ ,\ h(\sqrt{-\frac{a}{۳}})=\frac{۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}-۱$$

$$\xrightarrow{\text{هم‌علامت باشند}}(-\frac{۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}-۱)(\frac{۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}-۱)>۰$$

$$\Rightarrow -۱<\frac{۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}<۱\xrightarrow{a<۰}-۱<\frac{۲a}{۳}\sqrt{-\frac{a}{۳}}<۰$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{-\frac{a}{۳}}}-۱<-۲t^۳<۰\Rightarrow ۰<t=\sqrt{-\frac{a}{۳}}<\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}}<a<۰$$

اجتماع شرط‌های (الف) و (ب)، محدودهٔ $a>-\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}}$ را نتیجه می‌دهد.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۲۰- **گزینهٔ «۴»** (علی شهرابی)

نمودار تابع، مجانب قائم ندارد، پس $b>۰$ است. هم‌چنین مجانب افقی نمودار، خط $y=۰$ است، پس حد تابع وقتی $x\to\pm\infty$ برابر صفر است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+bx}{x^۲+b}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{x^۲}=a=۰$$

پس تا اینجا ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{bx}{x^۲+b}$ است. حال با توجه به نمودار، مشخص است که مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر $\sqrt{۳}$ است. یعنی مقدار تابع در ریشهٔ مثبت f' برابر $\sqrt{۳}$ است:

$$f'(x)=\frac{b(b-x^۲)}{(x^۲+b)^۲}\xrightarrow{f'(x)=۰}b-x^۲=۰\xrightarrow{x>۰}x=\sqrt{b}$$

$$\xrightarrow{f(\sqrt{b})=\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{b}}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow b=۱۲$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۱۳۷ و ۱۳۸)

تلاش در مسیر موفقیت

ریاضی پایه

۲۱- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

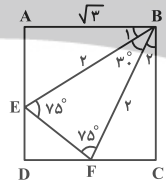
شیب خط برابر ۱ است، پس خط با قسمت مثبت محور x ها زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر ۱ باشد.

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۲۲- **گزینهٔ «۲»** (سعید تن‌آرا)

دو مثلث ABE و BCF بنابه حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. بنابراین $BF = ۲$ است و مثلث BEF متساوی‌الساقین است و در نتیجه $E\hat{F}B = ۷۵^\circ$. پس در مثلث BEF داریم: $\hat{B} = ۳۰^\circ$. مساحت مثلث BEF برابر است با:

$$S_{BEF} = \frac{۱}{۲}BE \times BF \times \sin B = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = ۱$$



از طرفی از هم‌نهشتی مثلث‌های ABE و BFC داریم:

$$\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = ۳۰^\circ$$

و در نتیجه $AB = ۲\cos ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$ به دست می‌آید. در نتیجه مساحت مربع $ABCD$ برابر $\sqrt{۳}^۲ = ۳$ است و مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S = S_{ABCD} - S_{BEF} = ۳ - ۱ = ۲$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

$$A = \frac{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \cos(۹۰^\circ - ۱۰^\circ)\cos(۹۰^\circ - ۷۰^\circ)}{\cos ۶۸^\circ \cos ۸^\circ + \cos(۹۰^\circ - ۸^\circ)\cos(۹۰^\circ - ۶۸^\circ)}$$

$$= \frac{\cos ۷۰^\circ \cos ۱۰^\circ + \sin ۱۰^\circ \sin ۷۰^\circ}{\cos ۶۸^\circ \cos ۸^\circ + \sin ۸^\circ \sin ۶۸^\circ} = \frac{\cos(۷۰^\circ - ۱۰^\circ)}{\cos(۶۸^\circ - ۸^\circ)}$$

$$= \frac{\cos ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ} = ۱$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۲۴- **گزینهٔ «۴»** (حامد معنوی)

با توجه به این‌که $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ و $۱ + \cot^۲ x = \frac{۱}{\sin^۲ x}$ است، می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{۱ - ۲\sin^۲ x} \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۳}$$

همچنین داریم:

$$\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x = \frac{۲}{۳} \quad , \quad \cot^۲ x = \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = ۲$$

و مطلوب مسئله را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۲}) + \cot^۲(۲\pi + x) = \cos^۲ x + \cot^۲ x$$

$$= \frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۸}{۳}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۲۵- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

از بسط سینوس مجموع کمان استفاده می‌کنیم:

$$۳(\sin\theta.\cos\frac{\pi}{۶} + \cos\theta.\sin\frac{\pi}{۶}) = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\sin\theta + \frac{۳}{۲}\cos\theta = \cos\theta \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\sin\theta = -\frac{۱}{۲}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = -\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

حال از اتحاد $\cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\cos ۲\theta = \frac{۱ - \frac{۱}{۲۷}}{۱ + \frac{۱}{۲۷}} = \frac{۲۶}{۲۸} = \frac{۱۳}{۱۴}$$

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۲۶- **گزینهٔ «۱»** (رضا طاری)

تابع $y = [\sqrt{x}]$ در نقاطی که $\sqrt{x}$ مقدار صحیح به خود بگیرد، ناپیوسته است که در بازهٔ $(۲۵ , ۱)$ این نقاط $x = ۴$، $x = ۹$ و $x = ۱۶$ هستند.

تلاشی در مسیر موفقیت

تابع f فقط در $x=9$ و $x=16$ ناپیوسته است. یعنی در $x=4$ پیوسته است و این زمانی رخ می‌دهد که $x=4$ ریشهٔ عبارت $x-3a$ باشد.

$$\Rightarrow 4-3a=0 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(عادل حسینی)*

ابتدا حد تابع $y=\frac{1}{x-1}$ را وقتی $x\to 2^-$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-1}=1$$

تابع $y=\frac{1}{x-1}$ در $x=2$ نزولی است، بنابراین از مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f\left(\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}([-x]x^2+x)$$

$$=\lim_{x\to 1}(-2x^2+x)=-1$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۶)

۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(عادل حسینی)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 3x\sin^2 x}{\sin^2 3x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{9x^2}=\frac{2}{9}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(شاهین پروازی)*

$$\Rightarrow n=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}|}{4x+m}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{4x+m}$$

دقت کنید که از اعداد بازهٔ $(1,0)$ هر چقدر ریشه بزرگ‌تر بگیریم، بزرگ‌تر می‌شوند. در عبارت فوق حد صورت صفر است، پس برای این‌که $n\neq 0$ باشد، حد مخرج نیز باید صفر باشد:

$$\Rightarrow 4(1)+m=0 \Rightarrow m=-4$$

$$\Rightarrow n=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{4x-4}\ \overset{HOP}{=}\ \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4}=-\frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow mn=\frac{1}{6}$$

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(حامد معنوی)*

$f(a)$ را b در نظر می‌گیریم. باید حدهای چپ و راست تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند، پس داریم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}(9x-1)=9a-1$$

که باید برابر b باشد:

$$\Rightarrow 9a-1=b \qquad (1)$$

در تابع $h(x)=\frac{3x^2-2x-1}{x-a}$، اگر حد در $x=a$ موجود باشد، لازم است که حد صورت نیز برابر صفر باشد:

$$3x^2-2x-1=0 \Rightarrow a=1 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{3}$$

به ازای $a=-\frac{1}{3}$ داریم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=9a-1=9\left(-\frac{1}{3}\right)-1=-4$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}\frac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{3})^+}\frac{(x+\frac{1}{3})(3x-3)}{x+\frac{1}{3}}=-4$$

پس $f(a)=-4$ و $a=-\frac{1}{3}$ مقادیر قابل قبول‌اند و در نتیجه $a-f(a)=\frac{11}{3}$ است. دقت کنید که اگر $a=1$ را مفروض بگیریم، تساوی حدهای چپ و راست رخ نمی‌دهد.

(حسابان ۱- حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

تلاشی در مسیر موفقیت

هندسه ۳

۳۱- **گزینهٔ «۱»** (هومن عقیلی)

$$\overset{\Delta}{ABC}\text{ محیط} = AB+AC+\underbrace{BC}_{۱۲} = ۳۲ \Rightarrow AB+AC = ۲۰$$

یعنی A روی یک بیضی به کانون‌های B و C حرکت می‌کند، به‌طوری که $۲a = ۲۰$ و $۲c = ۱۲$. یعنی $a = ۱۰$ و $c = ۶$؛ با توجه به این‌که $a^۲ = b^۲ + c^۲$، پس $b = ۸$ و چون $AH > b$ یعنی $AH > ۸$، در نتیجه با این شرایط مثلثی رسم نمی‌شود.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۳۲- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)

طبق فرض داریم:

$$MF = x \Rightarrow MF' = ۳x$$

قضیه کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{MFF'}$:

$$x^۲ + ۹x^۲ - ۲(x)(۳x)\underbrace{\cos ۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = (۲\sqrt{۷})^۲$$

$$\Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x = ۲$$

$$\Rightarrow MF = ۲ \ , \quad MF' = ۶ \Rightarrow MF + MF' = ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

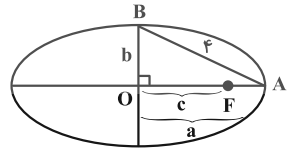
$$FF' = ۲c = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow c = \sqrt{۷}$$

$$\Rightarrow \text{خروج از مرکز}: e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۳- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

طبق فرض و شکل داریم:



$$AF = a - c = ۱ \Rightarrow a = c + ۱$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\text{ در }: \begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۱۶ \\ + \ a^۲ = b^۲ + c^۲ \end{cases}$$

$$۲a^۲ = ۱۶ + c^۲$$

$$\Rightarrow ۲(c+۱)^۲ = ۱۶ + c^۲ \Rightarrow c^۲ + ۴c - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow c = \frac{-۲ \pm \sqrt{۱۸}}{۱} = ۳\sqrt{۲} - ۲ \Rightarrow FF' = ۲c = ۶\sqrt{۲} - ۴$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

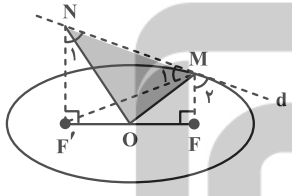
طول قطرهای بیضی $۲a = ۸$ و $۲b = ۲\sqrt{۷}$ است، پس $۲c = ۶$. نقطهٔ M را به F' وصل می‌کنیم، با استفاده از ویژگی‌های خط مماس بر بیضی می‌دانیم:

$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

همچنین به کمک قضیه موازی مورب داریم:

$$\hat{M}_۲ = \hat{N}_۱$$

$$\Rightarrow NF' = MF'$$



از طرفی نقطهٔ O وسط ساق ذوزنقه قائم‌الزاویهٔ $MFF'N$ قرار دارد. پس:

$$S_{OMN} = \frac{۱}{۲}S_{MFF'N} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{(MF+NF').FF'}{۲}\right)$$

$$= \frac{۱}{۴}(۲a)(۲c) = ac = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۴۹)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)

داریم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x = ۲ \Rightarrow \text{مرکز دایره}: W\left(-\frac{a'}{۲}, -\frac{b'}{۲}\right) = (۱, ۰)$$

$$(y+b)^۲ = ۲(x+a) \xrightarrow{\text{سهمی افقی}} \begin{cases} \text{رأس سهمی}: S(-a, -b) \\ ۴a'' = ۲ \Rightarrow a'' = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تلاشی درمسیر موفقیت

کانون سهمی : $F(-a+\frac{1}{2},-b)$ ← دهانه به سمت راست

طبق فرض، مرکز دایره بر کانون سهمی منطبق است:

$$(1,0)=(-a+\frac{1}{2},-b)\Rightarrow\begin{cases}-a+\frac{1}{2}=1\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\\-b=0\Rightarrow b=0\end{cases}$$

پس رأس سهمی به صورت $S(\frac{1}{2},0)$ و معادلهٔ خط هادی برابر می‌شود با:

$$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

۳۶- **گزینهٔ «۱»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$2(y^2+2y)=x-k$$

$$2((y+1)^2-1)=x-k$$

$$(y+1)^2=\frac{1}{2}(x-k+2)\Rightarrow\begin{cases}\text{رأس سهمی: } S(k-2,-1)\\4a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{8}\end{cases}$$

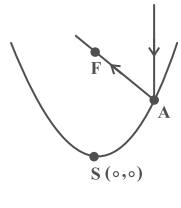
خط هادی در سهمی افقی : $x=\alpha-a\Rightarrow x=k-2-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow k=2$$

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۰ تا ۵۶)

۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

چون پرتوی نور موازی محور سهمی است، پس پرتو بازتاب از کانون سهمی می‌گذرد.



$x^2=4y\ ,\ a=1\Rightarrow F(0,1)$

نقطهٔ برخورد: $\begin{cases}x^2=4y\Rightarrow 4=4y\Rightarrow y=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow A(2,1)$

معادلهٔ پرتو بازتاب گذرنده از دو نقطهٔ $A(2,1)$ و $F(0,1)$ به صورت $y=1$ است که عرض از مبدأ آن $y=1$ است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

مختصات کانون این سهمی $F(1,0)$ است. پس نقطهٔ M پایین‌تر از کانون سهمی و پرتوهای نور خارج شده پس از بازتابش به صورت نور بالا هستند.

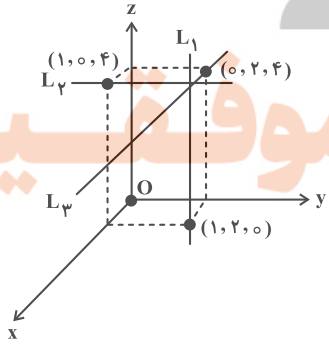
(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۶ و ۵۷)

۳۹- **گزینهٔ «۱»** *(مهرداد ملوندی)*

چون خط گذرا از دو نقطهٔ A و B موازی یکی از محورهای دستگاه $\mathbb{R}^3$ است، پس دو مقدار از سه مقدار x، y و z در مختصات آن‌ها با هم برابر است. پس خط گذرا از این دو نقطه، یکی از سه خط زیر است:

$$L_1:\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=1\\z=4\end{cases}\qquad L_3:\begin{cases}y=2\\z=4\end{cases}$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات (نقطهٔ O) از سه خط L_1، L_2 و L_3 به ترتیب $\sqrt{5}$، $\sqrt{17}$ و $\sqrt{20}$ است و چون $\sqrt{5}<3<\sqrt{17}<\sqrt{20}$، پس نقطهٔ M روی خط L_1 قرار دارد و مختصات آن به صورت $M(1,2,z)$ است و طبق فرض داریم:



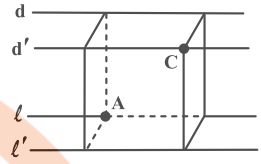
$$OM=\sqrt{1^2+2^2+z^2}=3\Rightarrow z=\pm 2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M_1=(1,2,2)\Rightarrow 1+2+2=5\\M_2=(1,2,-2)\Rightarrow 1+2-2=1\end{cases}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

۴۰- **گزینهٔ «۴»** (مهریار راشدی)

یکی از قطرهای مکعب مستطیل، قطر AC است.



$$A(1,1,-2) \quad , \quad C(3,4,2)$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{29}$$

خطوط d، d'، ℓ و ℓ' موازی با محور y ها هستند.

$$d:\begin{cases}x=1\\z=2\end{cases} \qquad d':\begin{cases}x=3\\z=2\end{cases}$$

$$\ell:\begin{cases}x=1\\z=-2\end{cases} \qquad \ell':\begin{cases}x=3\\z=-2\end{cases}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۶۸)

هندسه ۳- پیشروی سریع

۴۱- **گزینهٔ «۱»** (هومن عقیلی)

$$\vec{a}=(m,2m,3),\ \vec{b}=(3,-1,2m) \xrightarrow{\vec{a}.\vec{b}=7} 3m-2m+6m=7$$

$$\Rightarrow m=1 \Rightarrow \begin{cases}\vec{a}=(1,2,3)\\\vec{b}=(3,-1,2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** (سوگند روشنی)

می‌دانیم فاصلهٔ F تا C دو برابر طول ضلع (قطر) می‌باشد. در نتیجه:

$$|FC|=\sqrt{(-3-2)^2+(2+3)^2+(1-1)^2}$$

$$|FC|=\sqrt{25+25+0}=5\sqrt{2}=2a\Rightarrow a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$ طول ضلع

$$|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos30^\circ=\sqrt{3}a\times2a\times\cos30^\circ$$

$$=\sqrt{3}\times2\times\frac{25}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{75}{2}=37/5$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴۳- **گزینهٔ «۲»** (علی ایمانی)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$=|AB||AC|\cos120^\circ-16=4(3)(-\frac{1}{2})-16=-22$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۷۹)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** (امیررضا فلاح)

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}b\Rightarrow\frac{-4}{9}\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{3^2}\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=-4$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(-1,0,3)\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow(\sqrt{1+0+9})^2=|\vec{a}|^2+3^2-8\Rightarrow|\vec{a}|^2=9\Rightarrow|\vec{a}|=3$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۴۵- **گزینهٔ «۳»** (مهرداد ملوندی)

چون بردار $\vec{a}$ بر محور x ها و بردار $(2,-2,1)$ عمود است، پس بردار $\vec{a}$ موازی با ضرب خارجی دو بردار $(0,0,1)$ و $(2,-2,1)$ است:

$$\vec{u}=(1,0,0)\times(1,2,-2)=(0,2,2)$$

طول بردار $\vec{a}$ برابر ۴ است، پس:

$$\vec{a}=(\pm4)\times\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{\pm4}{2\sqrt{2}}(0,2,2)=(0,\pm2\sqrt{2},\pm2\sqrt{2})$$

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد محور z ها برابر است با:

$$a_z=2\sqrt{2}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۶- **گزینهٔ «۱»** (خرشاد صدیقی‌فر)

طرفین رابطه $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ را یک بار در $\vec{a}$ و یک بار در $\vec{b}$ ضرب خارجی می‌کنیم:

تلاشی درمسیر موفقیت

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{o} \\ \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{o} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a} \\ \vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\Rightarrow \vec{c}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حاصل}} \vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o} \xrightarrow{\text{طول}} =0$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۷- **گزینهٔ «۱»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

اگر بردار $\vec{c}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود باشد پس باید با بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ موازی باشد، البته می‌توانیم از ویژگی‌های ضرب داخلی به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\vec{a}.\vec{c}=0\Rightarrow (3,-1,1).(m,5,2m)=0$$

$$\Rightarrow 5m-5=0\Rightarrow m=1$$

$$\vec{b}.\vec{c}=0\Rightarrow (m,1,n).(m,5,2m)=0$$

$$\xrightarrow{m=1} 1+5+2n=0\Rightarrow n=-3$$

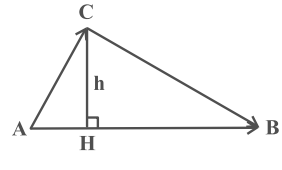
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}=(3,-1,1) \\ \vec{b}=(1,1,-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=(2,10,4)$$

می‌دانیم مساحت مثلث بناشده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، نصف اندازه ضرب خارجی دو بردار است:

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{4+100+16}=\sqrt{30}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۸- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)



$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(6,0,3)$$

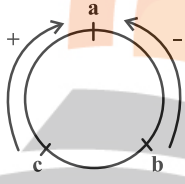
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{36+9}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}\underbrace{|\overrightarrow{AB}|}_{3}h\Rightarrow h=\sqrt{5}$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ و ۸۲)

۴۹- **گزینهٔ «۳»** (مهریار راشدی)

به دایره دقت کنید:



داریم:

$$\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=-\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$$

بنابراین:

$$-3\vec{b}.(\vec{c}\times 2\vec{a})=-6\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=6\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$$

پس:

$$6\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})=6(2,1,1).(-1,1,-2)=6(-2+1-2)=-18$$

(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

۵۰- **گزینهٔ «۴»** (مهرداد ملوندی)

طبق فرض داریم:

$$V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=3$$

حجم متوازی‌السطوح مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V'=|(\vec{a}+2\vec{b}).((\vec{b}+2\vec{c})\times(\vec{c}+2\vec{a}))|$$

$$=|(\vec{a}+2\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+2\vec{b}\times\vec{a}+2\underbrace{\vec{c}\times\vec{c}}_{\vec{o}}+4\vec{c}\times\vec{a})|$$

$$=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+8\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})|=9|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$$=9V=9\times 3=27$$

توجه:

$$\begin{cases} \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})=0 \\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) \end{cases}$$

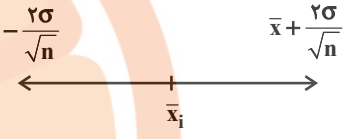
(هندسه ۳- بردارها؛ صفحه‌های ۸۳ و ۸۴)

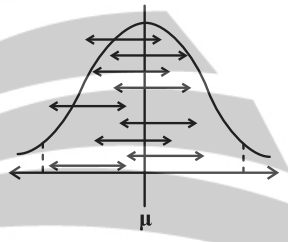
تلاشی درسیر موفقیت

آمار و احتمال

۵۱- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد جوادی)*

اگر نمونه‌گیری را روی یک جامعه تکرار کنیم و میانگین هر نمونه را با $\bar{x}_i$ نشان دهیم به‌طوری که در ۹۵ درصد (یا بیشتر) موارد، پارامتر μ (میانگین جامعه) را قطع می‌کند و فقط ۵ درصد بازه‌هایی به فرم زیر شامل μ نمی‌شوند.





این بازه به بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی معروف است که به صورت $(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$ می‌باشد. طول این بازه برابر است با:

(ابتدای بازه) − (انتهای بازه) = طول بازهٔ اطمینان ۹۵٪

$$=(\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})-(\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\text{طول بازهٔ اطمینان}=\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۷)

۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد جوادی)*

با توجه به توضیحات موجود در کتاب درسی آمار و احتمال هر چهار گزارهٔ فوق درست می‌باشند.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۰)

۵۳- **گزینهٔ «۳»** *(امیررضا فلاح)*

در یک نمونه دو عضوی به فرم $(a\ ,\ b)$ داریم:

$$\bar{x}=\frac{a+b}{2}\Rightarrow\sigma^2=\frac{(a-\frac{a+b}{2})^2+(b-\frac{a+b}{2})^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{4}$$

طبق فرض:

$$\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow(a-b)^2=9\Rightarrow|a-b|=3$$

یعنی دو عدد مورد انتخاب باید اختلافشان ۳ واحد باشد همه این دوتایی به فرم زیر هستند.

$$(a\ ,\ b)=(4,7)\ ,\ (5\ ,\ 8)\ ,\ \ldots$$

چون تعداد نمونه‌ها، ۱۰ عدد است، پس دهمین نمونه به فرم $(16\ ,\ 13)$ بوده و مجموعهٔ اولیه به فرم $\{16\ ,\ \ldots\ ,\ 6\ ,\ 5\ ,\ 4\}$ می‌باشد. تعداد عضوهای این مجموعه ۱۳ می‌باشد.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۱)

۵۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهریار راشدی)*

انحراف معیار برآورد میانگین جامعه از تقسیم انحراف معیار جامعه بر جذر، اندازهٔ نمونه به دست می‌آید.

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین واریانس برآورد میانگین جامعه عبارت است از:

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

با توجه به این‌که واریانس جامعه نامعلوم است، از تخمین آن یعنی واریانس نمونه استفاده می‌کنیم:

$$\sigma=25\Rightarrow\sigma^2=625$$

پس برآورد نقطه‌ای واریانس میانگین نمونه‌ها برابر است با:

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{625}{25}=25$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحهٔ ۱۲۱)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(مهریار راشدی)*

مجموع نمونه‌های سه عضوی انتخاب شده برابر ۹ و میانگین آن‌ها $\bar{x}=3$ است. تعداد کل نمونه‌های سه عضوی برابر با $\binom{6}{3}=20$ است و احتمال آن‌که نمونه‌ای سه عضوی میانگین ۳ را برآورد کند برابر با $\frac{3}{20}$ است (زیرا از ۲۰ نمونهٔ ۳ عضوی، میانگین سه نمونهٔ ۳ عضوی برابر با ۳ است.) بنابراین:

تلاشی درسیر موفقیت

$$m-n=3-\frac{3}{20}=\frac{285}{100}=2/85$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۱)

۵۶- **گزینهٔ «۴»** (سوگند روشنی)

همهٔ موارد صحیح هستند و در آمار استنباطی از روی آماره‌های مختلف سعی بر تخمین پارامتر جامعه است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۱۵)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** (سوگند روشنی)

می‌دانیم طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد در نمونه‌ای با اندازهٔ n برابر $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{100}}=2\Rightarrow\frac{4\sigma}{10}=2\Rightarrow\sigma=5$$

$$n_2=25n_1=2500$$

$$\bar{x}-\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$5-\frac{2\times5}{50}\le\mu\le5+\frac{2\times5}{50}\Rightarrow4/8\le\bar{x}\le5/2$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۵۸- **گزینهٔ «۲»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

در نمونه‌گیری سامانمند، می‌دانیم شماره‌های انتخاب شده جملات متوالی از دنبالهٔ حسابی هستند پس اگر قدرنسبت دنباله را d در نظر بگیریم $kd=45-17$ یعنی d مقسوم‌علیهی از ۲۸ است و داریم:

$$d=2,4,7,14,28$$

از طرفی اگر $d=2,4$ آن‌گاه عدد ۵ نیز انتخاب می‌شود که خلاف فرض است. پس d می‌تواند ۷ یا ۱۴ یا ۲۸ باشد و فقط به ازای $d=7$ عدد ۱۰ نیز انتخاب می‌شود و احتمال برابر $\frac{1}{3}$ است.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۵۹- **گزینهٔ «۲»** (علی ایمانی)

نفرات انتخاب شده در روش سامانمند تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

$$\begin{cases}a_1=m+3\\a_2=6m+4\\a_8=20m+42\end{cases}\Rightarrow d=5m+1\xrightarrow{\times6}6d=30m+6$$

$$\Rightarrow6d=14m+38$$

$$30m+6=14m+38\Rightarrow16m=32\Rightarrow m=2$$

$$a_1=5\ ,\ a_2=16\Rightarrow\text{طول دسته}=11$$

$$\text{تعداد دسته‌ها}=\frac{220}{11}=20\Rightarrow a_{20}=5+19(11)=214$$

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

۶۰- **گزینهٔ «۴»** (مصطفی دیداری)

$$\text{میانگین جامعه}=\frac{1+3+5+\ldots+2N-1}{N}=\frac{N^2}{N}=N$$

$$\text{میانگین نمونه}=\frac{1+3+9+7}{4}=\frac{20}{4}=5$$

میانگین نمونه برآوردی از میانگین جامعه است پس $N=5$ برآورد می‌شود.

(آمار و احتمال- آمار استنباطی؛ صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۵)

تلاشی درمسیر موفقیت

آمار و احتمال

۶۱- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

احتمال شرطی با کاهش فضای نمونه است.

فضای نمونه کاهش یافته:

$$\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۶),(۶,۳)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(اسحاق اسفندیار)*

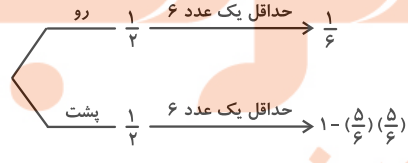
تعداد حالت انتخاب سالن‌ها $۵^۵$ و تعداد حالت‌هایی که سالن ۵ انتخاب نمی‌شود $۴^۵$. بنابراین:

$$۱-\frac{۴^۵}{۵^۵}=\frac{۵^۵-۴^۵}{۵^۵}=\frac{۳۱۲۵-۱۰۲۴}{۳۱۲۵}=\frac{۲۱۰۱}{۳۱۲۵}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

۶۳- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

براساس صورت سؤال، نمودار درختی زیر را رسم می‌کنیم:



در نتیجه طبق قانون احتمال کل و با توجه به نمودار درختی، احتمال مشاهده حداقل یک بار عدد ۶ برابر خواهد شد با:

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۱}{۳۶}=\frac{۱۷}{۷۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۶۴- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

مهرهٔ سوم آبی باشد $= A$

دو مهره اول غیرهمرنگ $= B$

$$P(B|A)=\frac{P(B)\times P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۴}{۱۰}}$$

$$=\frac{\frac{۴\times۶}{۴۵}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۴}{۱۰}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۴}{۱۰}}=\frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۴)

۶۵- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

احتمال ظاهر شدن عدد زوج (یا فرد) در پرتاب تاس برابر $\frac{۱}{۲}$ است:

احتمال k بار زوج (در n پرتاب) $=\binom{n}{k}(\frac{۱}{۲})^n$

احتمال آن‌که در بار آخر برای $k-۱$ امین بار عدد فرد (در n پرتاب)

$$=\binom{n-۱}{k-۲}(\frac{۱}{۲})^n$$

$$\Rightarrow\binom{n}{k}(\frac{۱}{۲})^n=n\times\binom{n-۱}{k-۲}(\frac{۱}{۲})^n$$

$$\Rightarrow\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\times(n-۱)!}{(k-۲)!(n-k+۱)!}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{k(k-۱)}=\frac{۱}{n-k+۱}\Rightarrow k^۲-k=n-k+۱$$

$$\Rightarrow n=k^۲-۱$$

n از مربع کامل یک واحد کمتر است

$$\Rightarrow ۳۵=۶^۲-۱$$

در بین گزینه‌ها فقط $n=۳۵$ می‌تواند باشد.

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۶۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی ایمانی)*

فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$S=\{\{۱۷_A,۲۰_A\},\{۱۷_A,۲۰_B\},\{۱۷_B,۲۰_A\}$$

تیزهوشان برتر
تیزهوشی درمسیر موفقیت

$\{(۱۸_B , ۱۹_A\}, \{(۱۸_A , ۱۹_B\}, \{(۱۷_B , ۲۰_B\}, \{(۱۸_A , ۱۹_A\}, \{(۱۸_B , ۱۹_B\}\}$

$A = \{\{(۱۷_A , ۲۰_B\}, \{(۱۷_B , ۲۰_A\}, \{(۱۸_A , ۱۹_B\}, \{(۱۸_B , ۱۹_A\}\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۶۷- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) = ۱$$

$$\frac{\binom{۶}{۱}}{a \times ۰!} + \frac{\binom{۶}{۲}}{a \times ۱!} + \frac{\binom{۶}{۳}}{a \times ۲!} + \frac{\binom{۶}{۴}}{a \times ۳!} = ۱$$

$$\frac{۶}{a} + \frac{۱۵}{a} + \frac{۲۰}{۲a} + \frac{۱۵}{۶a} = ۱$$

$$\frac{۱۲ + ۳۰ + ۲۰ + ۵}{۲a} = ۱ \Rightarrow ۲a = ۶۷ \Rightarrow a = \frac{۶۷}{۲}$$

$$P(۲) - P(۳) = \frac{۳۰}{۲a} - \frac{۲۰}{۲a} = \frac{۱۰}{۲a} = \frac{۱۰}{۶۷}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۶۸- **گزینهٔ «۴»** (مهریار راشدی)

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + \frac{۲}{۵}$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + \frac{۱}{۵}$$

با فرض $P(A \cap B) = x$ داریم:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{x + \frac{۱}{۵}}{x + \frac{۲}{۵}} = \frac{\frac{۵x+۱}{۵}}{\frac{۵x+۲}{۵}} = \frac{(۵x+۲)-۱}{۵x+۲} = ۱ - \frac{۱}{۵x+۲}$$

هر چه $۵x + ۲$ کوچک‌تر باشد، $\frac{۱}{۵x+۲}$ بزرگ‌تر می‌شود و در نتیجه $۱ - \frac{۱}{۵x+۲}$ کوچک‌تر می‌شود. حداقل مقدار x برابر با صفر است،

بنابراین حداقل مقدار $\frac{P(B)}{P(A)}$ برابر است با:

$$۱ - \frac{۱}{۵ \times ۰ + ۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** (مهریار راشدی)

کیسه شامل $k + ۴$ مهره است. مهرهٔ اول باید آبی باشد و مهرهٔ دوم قرمز، پس:

$$P \text{ (دومی قرمز و اولی آبی)} = \frac{۴}{k+۴} \times \frac{k}{(k+۴)-۱} = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲۰k = (k+۴)(k+۳) \Rightarrow k^۲ - ۱۳k + ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (k-۱۲)(k-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۱ \\ k = ۱۲ \end{cases}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)

۷۰- **گزینهٔ «۱»** (امیررضا فلاح)

$$P(A' \mid B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{۱ - P(A \cup B)}{۱ - P(B)}$$

$$= \frac{۱ - (P(B) + P(A - B))}{۱ - P(B)} = \frac{۱ - (۰/۴ + ۰/۳)}{۱ - ۰/۴} = \frac{۰/۳}{۰/۶} = \frac{۱}{۲}$$

(آمار و احتمال- احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

تلاشی در مسیر موفقیت

ریاضیات گسسته

۷۱- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

در این گراف $\gamma = ۳$ و ۳ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a وجود دارد.

$$\{a , r , z\} \ , \ \{a , y , c\} \ , \ \{a , s , d\}$$

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

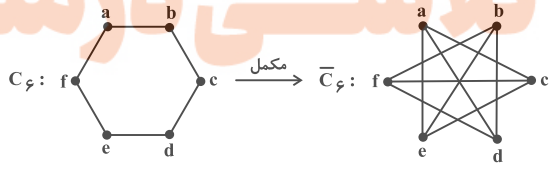
۷۲- **گزینهٔ «۳»** (کیوان دارابی)

چون مجموعهٔ احاطه گر $D = \{۱ , ۲ , ۳\}$، مینیمال است، بنابراین اگر عضوی از آن حذف شود، دیگر احاطه‌گر نخواهد بود. بنابراین مجموعهٔ $C = \{۱ , ۲\}$ احاطه‌گر نیست. اما متمم مجموعهٔ $D = \{۱ , ۲ , ۳\}$، احاطه‌گر است، یعنی مجموعهٔ $E = \{۴ , ۵ , ۶ , ۷\}$ احاطه‌گر است، زیرا گراف رأس تنها ندارد و حالا که رئوس ۱، ۲ و ۳ گراف را احاطه کرده‌اند، پس رأس‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ هر کدام لااقل با یکی از رأس‌های ۱، ۲ و ۳ مجاور هستند.

نکته: در یک گراف که رأس تنها ندارد، مجموعهٔ متمم هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، خود مجموعه‌ای احاطه‌گر است.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۳- **گزینهٔ «۲»** (فرزاد هوادی)



مطابق شکل، برای گراف $\overline{C}_۶$، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم (که دو عضوی نیز هستند)، عبارتند از:

$$\begin{cases} \{a , b\} , \{a , d\} , \{a , f\} \\ \{c , d\} , \{c , f\} , \{c , b\} \\ \{e , f\} , \{e , b\} , \{e , d\} \end{cases}$$

پس ۹ مجموعه احاطه‌گر دو عضوی برای $\overline{C}_۶$ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- گراف و مدل‌سازی؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۷۴- **گزینهٔ «۳»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

رقم یکان می‌تواند صفر یا ۵ باشد:

(الف) رقم یکان صفر باشد؛ در این صورت برای این‌که مجموع ارقام، عددی فرد باشد، باید از ارقام باقی‌مانده یکی زوج و دیگری فرد باشد:

[۱] صفر [۴] زوج غیرصفر [۵] فرد $\Rightarrow ۲۰$

[۱] صفر [۵] فرد [۴] زوج غیرصفر $\Rightarrow ۲۰$

(ب) رقم یکان ۵ باشد؛ دو رقم دیگر یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند:

[۱] ۵ [۴] صفر می‌تواند باشد [۴] زوج غیرصفر $\Rightarrow ۱۶$

[۱] ۵ [۳] [۴] فرد غیرتکراری $\Rightarrow ۱۲$

$\Rightarrow$ جواب کل $= ۶۸$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۲۰ تا ۱۲۶)

۷۵- **گزینهٔ «۲»** (مصطفی دیداری)

سه رأس مثلث باید از سه ضلع مختلف مستطیل انتخاب شود. پس ابتدا به $\binom{۴}{۳}$ روش، سه ضلع انتخاب کرده و سپس از هر کدام یک رأس انتخاب می‌کنیم. پس:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۴}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱} = ۱۰۸$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** (مهرداد ملوندی)

$A_۰$، $A_۱$ و $A_۲$ را به ترتیب مجموعهٔ اعضایی از A در نظر می‌گیریم که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌های ۰، ۱ و ۲ دارند. $A_۰ = \{۳ , ۶ , ۹ , ۱۲\}$

تلاشی درمسیر موفقیت

$A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$ $A_2 = \{2, 5, 8, 11\}$

در دو حالت، جمع سه عدد انتخابی مضرب ۳ است.

حالت (۱): هر سه عدد از یکی از مجموعه‌های A_0 ، A_1 و A_2 انتخاب شوند:

$$3 \times \binom{4}{3} = 12$$

حالت (۲): از هر یکی از مجموعه‌های A_0 ، A_1 و A_2 یک عدد انتخاب شود:

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 64$$

در نتیجه تعداد انتخاب‌های مورد نظر برابر است با:

$$12 + 64 = 76$$

(ریاضی ۱- شمارش، بدون شمردن؛ صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۴۰)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(علی ایمانی)*

اگر ۶ حرف کلمهٔ «مماشات» و ۲ جای خالی را با حرف O نمایش دهیم باید جایگشت حروف $\{م, م, ا, ا, ش, ت, O, O\}$ را حساب کنیم که تعداد آن برابر $\frac{8!}{2!2!2!} = 7!$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۷۸- **گزینهٔ «۴»** *(فرزاد هوادی)*

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 = 5$ برابر است با:

$$\binom{5+2-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

حال با در نظر گرفتن $x_1 + x_2 = 5$ در معادلهٔ دوم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_3^2 + x_4 + x_5 = 6$ را حساب می‌کنیم. چون x_3 متغیر جهش یافته (دارای توان ۲) می‌باشد برای x_3 مقادیر ممکن را در نظر گرفته و تعداد جواب‌های هر یک از معادلات به دست آمده را می‌شماریم:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_4 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+2-1}{2-1} = 7$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_4 + x_5 = 5 \Rightarrow \binom{5+2-1}{2-1} = 6$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_4 + x_5 = 2 \Rightarrow \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = 3$$

$x_3 = 3 \Rightarrow x_4 + x_5 = -3 \Rightarrow$ جواب ندارد.

$\Rightarrow$ تعداد کل جواب‌های دستگاه $= 6 \times (7+6+3) = 6 \times 16 = 96$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۷۹- **گزینهٔ «۱»** *(مصطفی دیداری)*

تعداد گل‌های نوع اول تا چهارم را به ترتیب x_1 تا x_4 می‌گیریم.

$$S: \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ } (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7) = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3}$$

$$A: \text{تعداد جواب های طبیعی معادله } (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7) = \binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{5 \times 4}{5 \times 3 \times 8} = \frac{1}{6}$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

$$N = \overline{abcd} \Rightarrow a + b + c + d = 12$$

a ، b ، c و d فرد هستند، بنابراین هیچ کدام نمی‌توانند صفر باشند و دیگر نگران صفر شدن a نیستیم.

$$\begin{cases} a = 2x_1 + 1 \\ b = 2x_2 + 1 \\ c = 2x_3 + 1 \\ d = 2x_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 + 2x_3 + 1 + 2x_4 + 1 = 12$$

$$\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

تلاشی در مسیر موفقیت

از طرفی می‌دانیم $a \geq 1$ ، $b \geq 1$ ، $c \geq 1$ و $d \geq 1$، بنابراین $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$ ، $x_3 \geq 0$ و $x_4 \geq 0$. در نتیجه:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $= \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

ریاضیات گسسته- پیشروی سریع

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

S را مجموعهٔ اعداد چهاررقمی با ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ در نظر می‌گیریم.

A و B را مجموعه اعدادی از S می‌گیریم که به ترتیب ارقام۴ و ۵ را ندارند. در این صورت تعداد اعدادی از S که هر دو رقم ۴ و ۵ را دارند برابر می‌شود با:

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

$$= |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 5^4 - 4^4 - 4^4 + 3^4 = 194$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۸۲- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

رمز دارای حرف کوچک نباشد : A

رمز دارای حرف بزرگ نباشد : B

رمز دارای رقم نباشد : C

کافی است $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}|$ را به دست آوریم.

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 10^4 - (6^4 + 6^4 + 8^4 - 2^4 - 4^4 - 4^4 + 0)$$

$$= 10000 - \underbrace{(1296 + 1296 + 4096 - 16 - 256 - 256)}_{6160} = 3840$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

مجموعه‌های A ، B و C را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

A : مجموعه همهٔ گراف‌های با مجموعه رأس‌های V که در آن $\deg(a) = 4$.

B : مجموعه همهٔ گراف‌های با مجموعه رأس‌های V که در آن $\deg(b) = 4$.

C : مجموعه همهٔ گراف‌های با مجموعه رأس‌های V که در آن $\deg(c) = 4$.

بنابراین مطلوب ما $|A' \cap B' \cap C'|$ است. حال طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = 2^{\binom{5}{2}} - 3 \times 2^{\binom{4}{2}} + 3 \times 2^{\binom{3}{2}} - 2^{\binom{2}{2}}$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = 1024 - 3 \times 64 + 3 \times 8 - 2 = 854$$

نکته: تعداد گراف‌های ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$ برابر است با: $2^{\binom{p}{2}}$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

مجموعه توابع یک به یک و شامل زوج مرتب $(a, 5)$ را A و شامل زوج مرتب $(b, 6)$ را B در نظر می‌گیریم. تعداد توابع مورد نظر برابر می‌شود با:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2)$$

$$- ((1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) + (5 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2) - (1 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2))$$

$$= 720 - (120 + 120 - 24) = 504$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات؛ صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

تلاشی درمسیر موفقیت

۸۵- **گزینهٔ «۱»** *(سوگند روشنی)*

هدف شرط‌های (۱) و (۲)، توابع پوشا از مجموعهٔ ۵ فیلم به مجموعهٔ ۳ داور است. حال چون دو فیلم a و e را یک نفر داوری می‌کند، می‌توانیم a و e را یک عضو در نظر گرفته و تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۴ عضوی به ۳ عضوی را به دست آوریم:

$$۳^m-(۳\times۲^m-۳)=۳^۴-(۳\times۲^۴-۳)=۸۱-۴۵=۳۶$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۷ و ۷۸)

۸۶- **گزینهٔ «۲»** *(سوگند روشنی)*

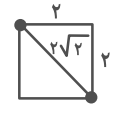
۴ زن و جاهای خالی بین آن‌ها و اطرافشان را به صورت ○ $z_۱$ ○ $z_۲$ ○ $z_۳$ ○ $z_۴$ ○ در نظر می‌گیریم؛ اگر ۱۷ مرد را ۱۷ کبوتر و ۵ مکان دایره‌ای شکل را ۵ لانه در نظر بگیریم، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، در حداقل یکی از دایره‌ها تعداد کبوترها حداقل مقدار را دارد که برابر خواهد بود با:

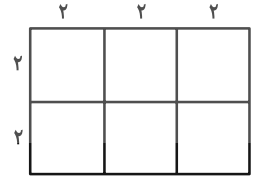
$$[\frac{۱۷-۱}{۵}]+۱=۴$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

مطابق شکل، مستطیل را به ۶ مربع ۲×۲ تقسیم می‌کنیم. چنانچه، هفت نقطه درون این مستطیل در نظر بگیریم، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، دو نقطه درون یکی از مربع‌ها قرار می‌گیرد که فاصلهٔ آن دو از $۲\sqrt{۲}$ واحد (قطر مربع) کمتر است.





(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۸۸- **گزینهٔ «۴»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

بدترین حالت را در نظر می‌گیریم، هر ۵ مهرهٔ سفید و ۱۲ مهرهٔ سبز را از ظرف خارج کرده‌ایم پس باید ۶ مهرهٔ دیگر که سیاه هستند را خارج کنیم تا مطمئن باشیم مهره‌های سبز و سیاه هر کدام بیشتر از ۵ تا هستند پس باید ۲۳ مهره خارج شود.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۸۹- **گزینهٔ «۱»** *(سیرمحمدرضا حسینی‌فرد)*

تعداد اعداد سه رقمی متمایز که با این روش می‌توان ساخت برابر $\binom{۵}{۳}=۱۰$ است. پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل $۲\times۱۰+۱=۲۱$ بار باید آزمایش تکرار شود.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

۹۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهرداد ملوندی)*

اگر اعضای مجموعهٔ A را به ۵ مجموعهٔ $\{۲,۱\}$ ، $\{۴,۳\}$ ، $\{۶,۵\}$ ، $\{۸,۷\}$ ، $\{۱۰,۹\}$ افراز کنیم، در این صورت با انتخاب ۶ عدد از A، طبق اصل لانه کبوتری، دو عدد در یکی از این ۵ مجموعه قرار خواهند گرفت که تفاضل آن‌ها برابر ۱ می‌شود؛ پس گزینهٔ «۳» درست است.

مثال نقض گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۱»: $۱,۲,۳,۴,۵,۱۰$

گزینهٔ «۲»: $۱,۲,۳,۴,۹,۱۰$

گزینهٔ «۴»: $۱,۲,۵,۶,۹,۱۰$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

تلاشی درمسیر موفقیت

فیزیک ۳

۹۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا ببابری)*

با توجه به نمودار داده شده، طول موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۵}{۴}\lambda = ۲۵ \Rightarrow \lambda = ۲۰\,cm = ۰/۲\,m$$

اکنون با معلوم بودن تندی انتشار موج، دورهٔ حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$\lambda = Tv \xrightarrow[v=۱۵\frac{m}{s}]{\lambda=۰/۲m} ۰/۲ = T\times ۱۵ \Rightarrow T = \frac{۰/۲}{۱۵} = \frac{۱}{۷۵}s$$

از آنجا که موج به سمت راست منتشر می‌شود، ذرهٔ P بعد از لحظهٔ $t=۰$، رو به بالا حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t=\frac{T}{۴}$ برای اولین بار به مکان $x=۸cm$ می‌رسد. سپس رو به پایین حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t=\frac{۳T}{۴}$ برای اولین بار به مکان $x=-۸cm$ می‌رسد. بنابراین زمانی که برای دومین بار به مکان $-۸cm$ می‌رسد و کل زمان سپری شده به صورت زیر است:

$$t = \frac{۳T}{۴} + T = \frac{۷T}{۴} \xrightarrow{T=\frac{۱}{۷۵}s} t = \frac{۷}{۴}\times\frac{۱}{۷۵} = \frac{۷}{۳۰۰}s$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

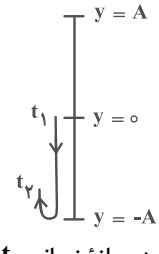
۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا با توجه به شکل، طول موج و سپس دورهٔ تناوب موج را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳}{۴}\lambda = ۱۵cm \Rightarrow \lambda = ۲۰cm = ۲\times۱۰^{-۱}m$$

$$\lambda = vT \Rightarrow ۲\times۱۰^{-۱} = ۴T \Rightarrow T = ۰/۰۵s$$

لحظهٔ $t_۱$ معادل با $\frac{۳T}{۲}$ $(\frac{t_۱}{T} = \frac{۰/۰۷۵}{۰/۰۵} = \frac{۳}{۲})$ و لحظهٔ $t_۲$ معادل با $\frac{۹}{۵}T$ $(\frac{t_۲}{T} = \frac{۰/۰۹}{۰/۰۵} = \frac{۹}{۵})$ است. با توجه به جهت انتشار موج، ذرهٔ M در لحظهٔ $t=۰$ در حال حرکت به طرف بالا است، پس مسیر حرکت ذره را در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ می‌توان به صورت شکل زیر مشخص کرد:



بنابراین نوع حرکت ذرهٔ M در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، ابتدا به صورت کندشونده و سپس تندشونده است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۱ تا ۷۳)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدجواد سورچی)*

می‌دانیم فاصلهٔ یک تراکم بیشینه از انبساط بیشینهٔ مجاورش برابر با $\frac{\lambda}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{\lambda}{۲} = ۱۲cm \Rightarrow \lambda = ۲۴\,cm = ۰/۲۴\,m$$

از طرفی می‌دانیم ذره‌ای که در وسط فاصلهٔ یک تراکم بیشینه از انبساط بیشینهٔ مجاورش است، حداکثر جابه‌جایی را نسبت به نقطهٔ تعادل دارد و حداکثر جابه‌جایی ممکن برای این ذره طول پاره‌خط نوسان یعنی $۲A$ است. بنابراین برای این ذره داریم: $۲A = ۱۰cm \Rightarrow A = ۵cm = ۰/۰۵m$

حالا بیشینهٔ تندی ذره در هنگام نوسان یعنی $v_{max} = A\omega$ را حساب می‌کنیم:

$$v_{انتشار} = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v_{انتشار}} = \frac{۰/۲۴}{۱/۲} = ۰/۲s$$

$$v_{max} = A\omega = A\times\frac{۲\pi}{T} \Rightarrow v_{max} = ۰/۰۵\times\frac{۲\pi}{۰/۲} = \frac{\pi}{۲}\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۷۱ و ۷۷)

۹۴- **گزینهٔ «۲»** *(معصومه شریعت‌ناصری)*

با توجه به رابطهٔ شدت صوت برحسب فاصله از چشمهٔ صوت می‌توانیم شدت صوت را در نقطهٔ مورد نظر پیدا کنیم:

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \Rightarrow \frac{I_۲}{۱۰۰} = (\frac{r_۱}{۲r_۲})^۲ \Rightarrow I_۲ = ۲۵\frac{W}{m^۲}$$

با توجه به این‌که ۲۰ درصد از انرژی صوت تلف شده، داریم:

$$I'_۲ = \frac{۸۰}{۱۰۰}I_۲ = \frac{۸۰}{۱۰۰}\times۲۵ = ۲۰\frac{W}{m^۲}$$

حال می‌خواهیم پیدا کنیم که تراز شدت صوت چند برابر می‌شود:

$$\beta_۲ = ۱۰\log\frac{I'_۲}{I_۰} = ۱۰\log\frac{۲۰}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰\log۲\times۱۰^{۱۳}$$

$$= ۱۰[\log۲ + ۱۳\log۱۰] = ۱۰[\underbrace{۰/۳ + ۱۳}_{۱۳/۳}] = ۱۳۳$$

$$\beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰} = ۱۰\log\frac{۱۰۰}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰\log۱۰^{۱۴} = ۱۴۰[\log۱۰] = ۱۴۰$$

$$\frac{\beta_۲}{\beta_۱} = \frac{۱۳۳}{۱۴۰} = \frac{۱۹}{۲۰}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۹۵- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

وقتی چشمهٔ صوت ساکن است طول موج دریافتی توسط شنونده‌های مختلف برابر است اما بسامد دریافتی آن‌ها می‌تواند متفاوت باشد، پس گزینهٔ «۳» درست است.

علت نادرستی سایر گزینه‌ها:

۱) بلندی صوت، شدتی است که گوش انسان از صوت درک می‌کند.

۲) بیشترین حساسیت گوش انسان به بسامدهایی در گسترهٔ $۲۰۰۰\,Hz$ تا $۵۰۰۰\,Hz$ است.

۴) وقتی یک چشمهٔ نور از ناظر دور می‌شود، طول موج افزایش می‌یابد و انتقال به سرخ رخ می‌دهد.

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۸۱ تا ۸۴)

۹۶- **گزینهٔ «۲»** *(آراس محمدی)*

مدت زمانی که طول می‌کشد تا خودرو از نقطهٔ A تا B جابه‌جا شود:

$$\Delta x = vt \Rightarrow t_{\text{خودرو}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{خودرو}}} \xrightarrow{v_{\text{خودرو}}=v} t_{\text{خودرو}} = \frac{۲d}{v}$$

همچنین مدت زمان لازم برای آن‌که پژواک صدای بوق نقطهٔ A در نقطهٔ B شنیده شود:

$$t_{\text{پژواک}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{پژواک}}} \xrightarrow{v_{\text{پژواک}}=v'} t_{\text{پژواک}} = \frac{۶d+۶d+۲d}{v'}$$

$$t_{\text{پژواک}} = \frac{۱۴d}{v'}$$

چون راننده پژواک صدای بوق را در نقطهٔ B می‌شنود، پس داریم:

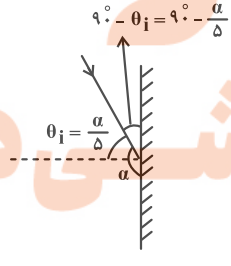
$$t_{\text{پژواک}} = t_{\text{خودرو}} \Rightarrow \frac{۱۴d}{v'} = \frac{۲d}{v} \Rightarrow \frac{v'}{v} = ۷$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۲ و ۹۳)

۹۷- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

طبق قانون بازتاب عمومی، همواره زاویهٔ تابش و بازتابش با هم برابر است.

پس مطابق با شکل زیر داریم:



$$۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۵} = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow ۹۰^\circ = \frac{۴}{۵}\alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{۵} = \theta_i = \frac{۹۰^\circ}{۴} = ۲۲/۵^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\theta_i = ۴۵^\circ$$

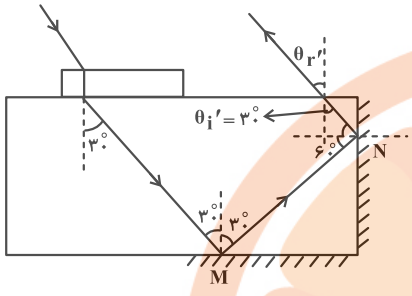
(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** *(فراز رسولی)*

پرتو از هوا وارد محیط شیشه‌ای و از محیط شیشه‌ای وارد مایع می‌شود. پس می‌توان رابطهٔ اسنل را مستقیماً بین هوا و مایع نوشت و داریم:

$$n_{۱}\sin ۴۵^\circ = n_{\text{مایع}}\sin\theta_r \Rightarrow ۱\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}\sin\theta_r \Rightarrow \theta_r = ۳۰^\circ$$

پس از آن با رسم ادامهٔ مسیر پرتو خواهیم داشت:



پرتو پس از برخورد به آینهٔ (۲) با زاویهٔ تابش ۳۰° به سطح آب می‌تابد. با نوشتن رابطهٔ اسنل برای خروج پرتو از آب، داریم:

$$n_{\text{مایع}}\sin\theta_{i'} = n_{\text{هوا}}\sin\theta_{r'} \Rightarrow \sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲} = ۱\times\sin\theta_{r'}$$

$$\Rightarrow \theta_{r'} = ۴۵^\circ$$

و مشاهده می‌شود که پرتو با همان زاویهٔ ورودی خارج می‌شود پس با پرتوی ورودی به آب زاویهٔ ۱۸۰° می‌سازد.

روش دوم: چون دو آینه به هم عمود هستند پرتوی خروجی از آن‌ها نسبت به پرتوی ورودی ۱۸۰° منحرف می‌شود پس دقیقاً با همان زاویهٔ شکستی که وارد آب شد، از آب به سطح جدایی دو محیط می‌تابد و طبعاً زاویهٔ خروجش از آب هم همان زاویهٔ تابش پرتوی اولیه است و موازی با پرتوی اولیه بازمی‌گردد.

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۹۴ تا ۹۸)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرمحمد میرسعید)*

$$f_{۱} + ۲f_{۱} + ۳f_{۱} + ۴f_{۱} = ۴۰۰ \Rightarrow ۱۰f_{۱} = ۴۰۰ \Rightarrow f_{۱} = ۴۰\,Hz$$

$$f_{۱} = \frac{v}{۲L} \Rightarrow v = ۲Lf_{۱} = ۲\times\frac{۱}{۱۰}\times۴۰ = ۸\frac{m}{s}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \Rightarrow v^{۲} = \frac{F}{\rho A} \Rightarrow \rho = \frac{F}{v^{۲}A}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{۱۲۸}{۶۴\times۲\times۱۰^{-۴}} = ۱۰۰۰۰\frac{kg}{m^{۳}}$$

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** *(حسام نادری)*

موارد (الف)، (ب) و (ث) طبق متن کتاب درسی درست هستند.

علت نادرستی سایر موارد:

پ) در آزمایش یانگ، نوارهای روشن در اصل نقاط با تداخل سازنده هستند.

تلاشی درمسیر موفقیت

ت) در نقش تداخلی آزمایش یانگ، پهنای هر نوار روشن یا تاریک با طول موج نور متناسب است و طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، با فرکانس نسبت عکس دارد.

(فیزیک ۳- برهم‌کنش‌های موج؛ صفحه‌های ۱۰۲ و ۱۰۵ تا ۱۰۸)

فیزیک ۳- پیشروی سریع

۱۰۱- **گزینهٔ «۳»** *(سیده‌ملیحه میرصالحی)*

با توجه به عدد نوترونی عنصر X، m برابر است با:

$$\text{عدد نوترونی} + {}^{\text{عددجرمی}\leftarrow 95}_{\text{عدداتمی}\leftarrow m}X \Rightarrow 95 = m + 48 \Rightarrow m = 95 - 48 = 47$$

در ادامه برای عنصر Y، عدد نوترونی برابر است با:

$$\text{عدد نوترونی} + {}^{\text{عددجرمی}\leftarrow m}_{\text{عدداتمی}\leftarrow 25}Y \Rightarrow m = 25 + 22 \Rightarrow \text{عدد نوترونی} = 47 - 25 = 22$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحهٔ ۱۳۸)

۱۰۲- **گزینهٔ «۳»** *(کامران ابراهیمی)*

بررسی موارد:

الف) درست

ب) درست؛ نیروی رباییشی هسته‌ای یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.

پ) نادرست؛ هستهٔ اورانیم پایدار نمی باشد و واپاشی می‌کند، منتهی واپاشی آن کند است. هستهٔ پایدار با بیشترین تعداد پروتون $(Z = 83)$ متعلق به بیسموت است.

ت) درست؛ جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل دهنده‌اش اندکی کمتر است. اگر این اختلاف جرم را که به آن کاستی جرم هسته گفته می‌شود، مطابق رابطهٔ $E = mc^2$ در مربع تندی نور (c^2) ضرب کنیم، انرژی بستگی هسته‌ای به دست می‌آید.

ث) نادرست؛ انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته کوانتیده‌اند و نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

با توجه به این‌که بار هسته را تعداد پروتون‌های آن هسته مشخص می‌کند، داریم:

$$q_A = Z_A e \Rightarrow 4/8\times10^{-18} = Z_A(1/6\times10^{-19}) \Rightarrow Z_A = 30$$

$$q_B = Z_B e \Rightarrow 2/4\times10^{-18} = Z_B(1/6\times10^{-19}) \Rightarrow Z_B = 15$$

از طرفی هسته‌های A و B روی خط $Z = N$ قرار گرفته‌اند، پس:

$$N_A = Z_A = 30 \Rightarrow A_A = Z_A + N_A = 60$$

$$N_B = Z_B = 15 \Rightarrow A_B = Z_B + N_B = 30$$

عدد جرمی هسته‌هایی که روی خط عمود بر خط $Z = N$ قرار گرفته‌اند، با هم برابر است، بنابراین:

$$A_C = A_A = 60 \Rightarrow A_C - A_B = 60 - 30 = 30$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(محمدجواد سورچی)*

با توجه به این‌که نیروی خالص بین A و B با نیروی خالص بین A و C یکسان است. بنابراین B و C یک نوع ذره هستند. از طرفی چون نیروی خالص بین B و C کوچک‌تر از نیروی خالص بین A و C است، درمی‌یابیم B و C هر دو پروتون هستند که نیروی دافعهٔ الکترواستاتیک باعث کمتر شدن نیروی خالص شده است و A که ذره‌ای متفاوت از B و C است همان نوترون است. بنابراین A، B و C به ترتیب نوترون، پروتون و پروتون هستند.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحهٔ ۱۴۰)

۱۰۵- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

در تمام واپاشی‌های هسته‌ای، تعداد نوکلئون‌ها پیش از واپاشی با مجموع تعداد نوکلئون‌ها پس از واپاشی، برابر هستند. همچنین عدد اتمی پیش از واپاشی با مجموع عدد اتمی پس از واپاشی، برابر است. اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر تعداد m ذرهٔ آلفا $({}^4_2\alpha)$ و تعداد n ذرهٔ پوزیترون $({}^0_{+1}e^+)$ از هستهٔ عنصر X جدا شده باشند:

$${}^{83}_{52}X \rightarrow m({}^4_2\alpha) + n({}^0_{+1}e^+) + {}^{75}_{47}Y$$

عددهای جرمی دو طرف فرایند را موازنه می‌کنیم:

$$83 = m\times4 + n\times0 + 75 \Rightarrow 8 = 4m \Rightarrow m = 2$$

یعنی دو ذرهٔ آلفا گسیل می‌شود.

عددهای اتمی دو طرف فرایند را نیز موازنه می‌کنیم:

$$52 = 2\times2 + n\times1 + 47 \Rightarrow 52 = n + 51 \Rightarrow n = 1$$

یعنی یک ذرهٔ پوزیترون گسیل می‌شود. بنابراین گزینهٔ «۱» درست و گزینهٔ «۳» نادرست است.

ب) به‌طور مشابه اگر تعداد m ذرهٔ آلفا $({}^4_2\alpha)$ و n ذرهٔ الکترون $({}^0_{-1}e^-)$ از هستهٔ عنصر X گسیل شده باشند، داریم:

$${}^{83}_{52}X \rightarrow m({}^4_2\alpha) + n({}^0_{-1}e^-) + {}^{75}_{47}Y$$

مشابه حالت الف، $m = 2$ به دست می‌آید.

عددهای اتمی دو طرف را نیز موازنه می‌کنیم:

$$۵۲ = ۲\times۲ + n\times(-۱) + ۴۷ \Rightarrow n = -۱$$

که غیرقابل قبول است. پس گزینه‌های «۲» و «۴» نادرست هستند.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۵)

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهران اسماعیلی)*

با نوشتن رابطهٔ فرایند واپاشی می‌توان تعداد پروتون‌های هسته مادر راتعیین کرد.

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-۱}Y + {}^{۰}_{+۱}\beta^{+} \Rightarrow \begin{cases} Z_Y = Z-۱ \\ N_Y = N+۱ \end{cases}$$

$$A = Z+N \xrightarrow{A=۶۵} Z+N = ۶۵$$

پس از واپاشی اختلاف تعداد نوترون‌ها و پروتون‌های هسته دختر برابر ۷ است. پس می‌توان نوشت:

$$(N+۱)-(Z-۱) = ۷ \Rightarrow N-Z = ۵$$

$$\begin{cases} Z+N = ۶۵ \\ N-Z = ۵ \end{cases} \Rightarrow Z = ۳۰$$

حال می‌توان بار هسته مادر را محاسبه کرد:

$$q = ne \xrightarrow[e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C]{n=Z=۳۰} q = ۳۰\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} = ۴/۸\times۱۰^{-۱۸}C$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(دانیال راستی)*

جرم فعال باقی‌ماندهٔ B در زمان Δt برابر است با:

$$m_B = m_{۰B}(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_B}}$$

جرم واپاشیده شدهٔ A در زمان Δt برابر است با:

$$m'_A = m_{۰A} - m_{۰A}(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_A}}$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$۲T_A = T_B$$

با انتخاب متغیر x به صورت $x = (\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta x}{T_B}}$ داریم:

$$m_B = m'_A \Rightarrow m_{۰B}(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_B}} = m_{۰A}(۱-(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_A}})$$

$$\xrightarrow[(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_A}} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲\Delta t}{T_B}} = x^۲]{(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_B}} = x} m_{۰B}x = m_{۰A}(۱-x^۲)$$

$$\xrightarrow{m_{۰B}=۶۰۰۰g \atop m_{۰A}=۱۶۰۰g} ۶۰۰۰x = ۱۶۰۰(۱-x^۲) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۴} \\ x = -۴ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

جرم واپاشیده شده B در مدت Δt برابر است با:

$$m'_B = m_{۰B} - m_{۰B}(\frac{۱}{۲})^{\frac{\Delta t}{T_B}} \Rightarrow m'_B = ۶۰۰۰(۱-x) = ۴۵۰۰g$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۰۸- **گزینهٔ «۲»** *(پوریا علاقه‌مند)*

طبق نمودار داده شده و با توجه به این‌که جرم اولیه $۸۰۰g$ است، داریم:

$$۸۰۰g \xrightarrow[T_{\frac{۱}{۲}}]{\text{پس از گذشت ۱ نیمه عمر}} \overbrace{۴۰۰g}^{\text{جرم باقی‌مانده}} \xrightarrow[T_{\frac{۱}{۲}}]{\text{نیمه عمر دیگر}} ۲۰۰g$$

یعنی پس از گذشت ۲ نیمه عمر جرم واپاشی شده ۶۰۰ گرم شده است.

$$۲T_{\frac{۱}{۲}} = ۶۰h \Rightarrow T_{\frac{۱}{۲}} = ۳۰h \Rightarrow T_{\frac{۱}{۲}} = ۳۰\times۶۰ = ۱۸۰۰min$$

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(محمد نهاوندی مقدم)*

بررسی موارد:

الف) درست

ب) درست

پ) درست

ت) درست

ث) نادرست؛ انرژی آزاد شده در هر شکافت، $۱۰^{۸}$ برابر انرژی آزاد شده به ازای هر مولکول در واکنش سوختن بنزین است.

(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۰)

۱۱۰- **گزینهٔ «۴»** *(حسام نادری)*

فقط مورد (پ) درست است.

بررسی موارد:

الف) در واکنش گداخت، به دلیل همجوشی هسته‌ها، مجموع جرم محصولات فرایند کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است و این کاستی جرم در انرژی آزاد شده خود را نشان می‌دهد.

ب) محصولات گداخت هسته‌های دوتریم و تریتیم، هستهٔ هلیم و یک نوترون است.

پ)

$$^{۱}_{۰}n + {}^{۲۳۵}_{۹۲}U \rightarrow {}^{۱۳۳}_{۵۰}Sn + {}^{۱۰۱}_{۴۲}M_{۰} + x\,{}^{۱}_{۰}n$$

$$\Rightarrow ۱+۲۳۵ = ۱۳۳+۱۰۱+x \Rightarrow x = ۲$$

ت) افزایش غلظت ^{۲۳۵}U در یک نمونهٔ اورانیم را غنی‌سازی می‌گویند.

ث) میله‌های کنترل در یک راکتور هسته‌ای، از مواد جذب کنندهٔ نوترون مثل بور و کادمیم ساخته می‌شوند. گرافیت به عنوان کندساز نوترون‌ها استفاده می‌شود.

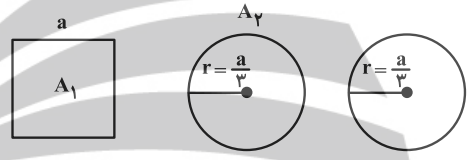
(فیزیک ۳- آشنایی با فیزیک هسته‌ای؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۳)

ترنج
تلاشی درمسیر موفقیت

فیزیک ۲

۱۱۱- **گزینهٔ «۱»** *(محمدجواد سورچی)*

طبق رابطهٔ $\Phi = AB\cos\theta$ درمی‌یابیم شار گذرنده از مسیر بستهٔ رسانا به تعداد حلقه‌ها ربطی ندارد. از طرفی کل سیم تشکیل دهندهٔ قاب مربع شکل اولیه را به دو حلقهٔ دایره‌ای تقسیم کرده‌ایم. بنابراین اگر هر ضلع قاب مربع شکل a باشد، طول سیم تشکیل دهندهٔ آن که همان محیط مربع است، برابر با $L_{\text{سیم}} = ۴a$ بوده و مقدار سیم برای هر حلقهٔ دایره‌ای که همان محیط دایره است برابر با $۲a$ است. حال مساحت حلقهٔ دایره‌ای را حساب می‌کنیم:



$$\text{محیط دایره} = ۲\pi r \Rightarrow ۲a = ۲\times ۳r \Rightarrow r = \frac{a}{۳}$$

$$A_۱ = a^۲$$

$$A_۲ = \pi r^۲ = \pi(\frac{a}{۳})^۲ = \frac{\pi a^۲}{۹} = \frac{a^۲}{۳}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{\Phi_۲}{\Phi_۱} = \frac{A_۲B\cos\theta}{A_۱B\cos\theta} = \frac{A_۲}{A_۱} \Rightarrow \frac{\Phi_۲}{۱۲} = \frac{\frac{a^۲}{۳}}{a^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \Phi_۲ = ۴\text{Wb}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(کامران ابراهیمی)*

$$|\bar{\varepsilon}| = |-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| = |\frac{B_۲A\cos\theta_۲ - B_۱A\cos\theta_۱}{\Delta t}|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = \frac{A}{\Delta t}|B_۲\cos\theta_۲ - B_۱\cos\theta_۱|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = \frac{۲\times ۱۰^{-۲}(\text{m}^۲)}{۲\times ۱۰^{-۳}(\text{s})}|(۰/۶\text{T}\times\cos ۶۰^\circ) - (۰/۱\text{T}\times\cos ۳۷^\circ)|$$

$$\Rightarrow |\bar{\varepsilon}| = ۱۰\times|\underbrace{۰/۳ - ۰/۰۸}_{۰/۲۲}| = ۲/۲\text{V}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۱۴)

۱۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدکاظم منشاری)*

محیط دایره $= ۲\pi r = ۳۰\,\text{cm}$

مساحت دایره $A = \pi r^۲ = ۷۵\,\text{cm}^۲$

تعداد حلقه‌ها $= ۴/۵ \div ۰/۳ = ۱۵$ حلقه

$$\Delta B = ۰/۳۶\,\text{T}$$

$$|\bar{\varepsilon}| = |-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}| = |-N\frac{A\Delta B\cos\theta}{\Delta t}|$$

$$= |-۱۵\times\frac{۷۵\times ۱۰^{-۴}\times ۰/۳۶}{۰/۰۳}| = ۱۸۰\times ۷۵\times ۱۰^{-۴} = ۱/۳۵\text{V}$$

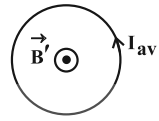
$$P = \frac{\varepsilon^۲}{R} = \frac{۱/۳۵\times ۱/۳۵}{۴/۵\times ۵} = ۸۱\text{mW}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

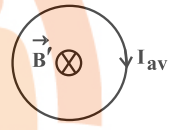
۱۱۴- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

هنگام ورود حلقه به میدان، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال افزایش است. در نتیجه با توجه به رابطهٔ $\varepsilon_{av} = -N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ نیروی محرکهٔ القایی و با توجه به رابطهٔ $I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$ جریان القایی در آن تولید می‌شود. طبق قانون لنز، این جریان در جهتی است که می‌خواهد با عامل تغییر شار مخالفت کند. پس جریان القایی، یک میدان مغناطیسی برون‌سو در حلقه ایجاد می‌کند و باید این جریان پادساعتگرد باشد.

تلاشی در مسیر موفقیت



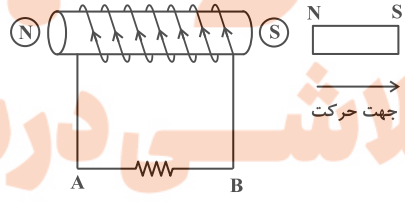
اما هنگام خروج حلقه از میدان، شار مغناطیسی در حال کاهش است و جریان القایی، طبق قانون لنز باید یک میدان مغناطیسی درون‌سو ایجاد کند تا از این راه با کاهش شار مخالفت کند. پس جریان ساعتگرد می‌شود.



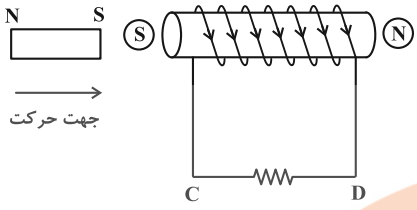
(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحهٔ ۱۱۷)

۱۱۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمود منصوری)*

در مورد سیملولهٔ سمت چپ؛ آهنربا به سمت راست حرکت می‌کند، بنابراین جریان القایی در سیملولهٔ سمت چپ باید به گونه‌ای باشد که طرف نزدیک به آهنربای آن قطب S ایجاد شود تا بنابر قانون لنز با دور شدن قطب N آهنربا مخالفت کند پس طبق قاعدهٔ دست راست جریان القایی در سیملولهٔ سمت چپ از A به B تولید می‌شود.



در مورد سیملولهٔ سمت راست؛ آهنربا به سمت راست حرکت می‌کند، بنابراین جریان القایی در سیملولهٔ سمت راست باید به گونه‌ای باشد که در طرف نزدیک به آهنربای آن قطب S ایجاد شود تا بنابر قانون لنز با نزدیک شدن قطب S آهنربا مخالفت کند. پس طبق قاعدهٔ دست راست جریان القایی در سیملولهٔ سمت راست از D به C تولید می‌شود.



(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۱۱۶- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

$$۲\pi r_۲ = ۲(۲\pi r_۱) \Rightarrow r_۲ = ۲r_۱$$

تعداد حلقه‌ها $N = \dfrac{\text{طول سیم}}{\text{محیط هر حلقه}} = \dfrac{a}{۲\pi r} \Rightarrow N_۱ = \dfrac{a}{۲\pi r_۱}$

$$, \ N_۲ = \frac{a}{۲\pi r_۲} \Rightarrow \frac{N_۲}{N_۱} = \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{۱}{۲}$$

طول سیملوله $\ell = N \times$ قطر مقطع سیم $= ND \Rightarrow \begin{cases} \ell_۱ = N_۱ D_۱ \\ \ell_۲ = N_۲ D_۲ \end{cases}$

ضریب القاوری $L = \mu_۰ \dfrac{N^۲ A}{\ell} \Rightarrow \dfrac{L_۲}{L_۱} = (\dfrac{N_۲}{N_۱})^۲ \times \dfrac{A_۲}{A_۱} \times \dfrac{\ell_۱}{\ell_۲}$

$$= (\frac{N_۲}{N_۱})^۲ \times (\frac{r_۲}{r_۱})^۲ \times \frac{N_۱}{N_۲} \times \frac{D_۱}{D_۲} \Rightarrow ۳ = (\frac{۱}{۲})^۲ \times (۲)^۲ \times ۲ \times \frac{D_۱}{D_۲}$$

$$\Rightarrow \frac{D_۱}{D_۲} = \frac{۳}{۲}$$

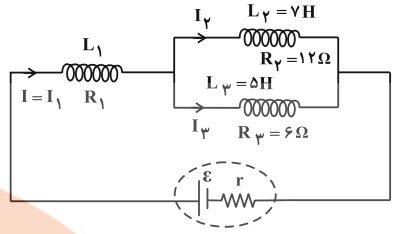
$$U = \frac{۱}{۲} L I^۲ \Rightarrow \frac{U_۲}{U_۱} = \frac{L_۲}{L_۱} \times (\frac{I_۲}{I_۱})^۲ = ۳ \times (\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۱}{۳}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۱)

۱۱۷- **گزینهٔ «۱»** *(مجتبی نکوئیان)*

وقتی دو مقاومت به‌طور موازی به یکدیگر وصل شوند، نسبت شدت جریان‌های آن‌ها برابر نسبت وارون مقاومت‌های آن‌ها است. بنابراین مطابق شکل زیر داریم:

تلاشی درمسیر موفقیت



$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} I_2 = \frac{I}{3} \\ I_3 = \frac{2I}{3} \end{matrix}$$
$$I = I_2 + I_3$$

با توجه به رابطهٔ انرژی ذخیره شده در میدان القاگر با ضریب القاوری $(U = \frac{1}{2}LI^2)$ L می‌توان نوشت:

$$3(U_2 + U_3) = U_1 \Rightarrow 3(\frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}L_3I_3^2) = (\frac{1}{2}L_1I_1^2)$$
$$\Rightarrow 3[7(\frac{I^2}{9}) + 5(\frac{4I^2}{9})] = L_1I^2 \Rightarrow L_1 = 9H$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۷۳، ۱۲۱ و ۱۲۲)

۱۱۸- **گزینهٔ «۲»** (محمدرضا شریفی)

$$t = \frac{19}{60} \Rightarrow I = 6\sin(10\pi \times \frac{19}{60}) = 6\sin\frac{7\pi}{6} = -3A$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 3^2 = 90mJ$$

جهت جریان در هر نصف دوره تغییر می‌کند. طبق معادلهٔ جریان،

$\frac{2\pi}{T} = 10\pi$ است، پس دورهٔ جریان $\frac{1}{5}$ ثانیه و نصف آن $\frac{1}{10}$ ثانیه است.

$$\frac{t}{\frac{T}{2}} = \frac{\frac{19}{60}}{\frac{1}{10}} \simeq 3$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۴)

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** (معصومه شریعت‌ناصری)

با کمک معادله نیروی محرکهٔ مولد می‌توان دریافت $\varepsilon_m = 2V$ که بیشینه ولتاژی است که به دو سر پیچه اولیه اعمال می‌شود. بنابراین داریم:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \xrightarrow[N_1=12,\ V_1=2,\ V_2=?]{N_2=24} \frac{V_2}{2} = \frac{24}{12} \Rightarrow V_2 = 4V$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۲۷)

۱۲۰- **گزینهٔ «۳»** (حسام نادری)

موارد (الف) و (پ) نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) در یک مولد جریان متناوب در لحظه‌ای که شار عبوری از قاب بیشینه است، سطح قاب عمود بر خطوط میدان مغناطیسی است و زاویهٔ بین نیم‌خط عمود بر سطح قاب و میدان، صفر درجه است و در نتیجه جریان القایی صفر است $(\sin 0 = 0)$.

ب) طبق متن کتاب درسی درست است.

پ) افزایش یا کاهش ولتاژ ac بسیار آسان‌تر از dc است.

ت) درست است؛ زیرا در لحظهٔ مورد نظر داریم:

$$\frac{2\pi}{T}t = 30^\circ \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_m \sin(\frac{2\pi}{T}t) = \varepsilon_m \sin 30^\circ = \frac{\varepsilon_m}{2}$$

(فیزیک ۲- القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

تلاشی در مسیر موفقیت

فیزیک ۱

۱۲۱- **گزینهٔ «۴»** *(محمد نهاوندی‌مقدم)*

چون پیستون می‌تواند آزادانه حرکت کند، فشار در دو حالت ثابت است و چون گازی وارد یا خارج نمی‌شود مقدار گاز نیز ثابت می‌ماند. بنابراین داریم:

$$\frac{P_1V_1}{n_1T_1}=\frac{P_2V_2}{n_2T_2}\Rightarrow\frac{V_1}{\theta_1+273}=\frac{1/4V_1}{2\theta_1+273}$$

$$\Rightarrow 1/4\theta_1+1/4\times273=2\theta_1+273\Rightarrow 0/6\theta_1=0/4\times273$$

$$\theta_1=182^\circ C\Rightarrow T_1=182+273=455K$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸ و ۱۲۹)

۱۲۲- **گزینهٔ «۱»** *(علی برزگر)*

چون حجم گاز از $4V$ به V رسیده است یعنی گاز متراکم شده است. لذا می‌توان نوشت: $W>0$

از طرفی تغییرات انرژی درونی به ΔT وابسته است. لذا داریم:

$$PV=nRT\Rightarrow T=\frac{PV}{nR}$$

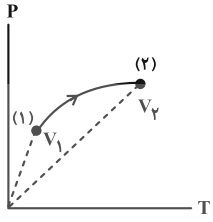
$$\underset{P}{\underset{\downarrow}{P_B}}\ \underset{5V}{\underset{\downarrow}{V_B}}>\underset{P}{\underset{\downarrow}{P_A}}\ \underset{4V}{\underset{\downarrow}{V_A}}\Rightarrow\frac{P_BV_B}{nR}>\frac{P_AV_A}{nR}\Rightarrow T_B>T_A$$

$$\Rightarrow\Delta T>0\Rightarrow\Delta U>0$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۲۸، ۱۲۹ و ۱۳۳)

۱۲۳- **گزینهٔ «۴»** *(محمدجواد سورچی)*

با توجه به نمودار $P-T$، درمی‌یابیم در طی فرایند (۱) به (۲)، دما افزایش می‌یابد. در نتیجه انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد $(\Delta U>0)$. از طرفی با توجه به شکل زیر می‌دانیم در فرایند هم حجم شیب نمودار $P-T$ برابر با $\frac{nR}{V}$ است و هر چه حجم مقدار مشخصی گاز بیشتر باشد شیب این نمودار کمتر است؛ بنابراین داریم:



$$P=\underbrace{\frac{nR}{V}}_{\text{شیب}}T$$

$$\text{شیب }(1)>\text{شیب }(2)\Rightarrow V_2>V_1$$

پس چون حجم گاز از (۱) به (۲) زیاد شده، گاز منبسط شده (مورد «پ» نادرست) و چگالی آن کم می‌شود (مورد «ب» درست). از طرفی چون $\Delta V>0$ است، $W<0$ است؛ یعنی کار محیط روی گاز منفی و کار گاز روی محیط مثبت است (مورد «الف» نادرست).

در نهایت برای بررسی گرما از قانون اول ترمودینامیک استفاده می‌کنیم:

$$\Delta U=Q+W\xrightarrow[\Delta U>0]{W<0}Q>0$$

بنابراین در این فرایند گاز از محیط گرما می‌گیرد. (مورد «ت» درست)

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲)

۱۲۴- **گزینهٔ «۱»** *(فراز رسولی)*

می‌دانیم در فرایند هم‌حجم روی گاز کامل کار انجام نمی‌شود و تغییر انرژی درونی گاز با گرمای مبادله شده برابر است. انرژی درونی گاز در این فرایند به ازای $2/6atm$ افزایش فشار $3900J$ افزایش یافته است. با توجه به این‌که در دمای صفر مطلق انرژی درونی گاز و فشار آن نیز صفر است. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}T\alpha P\\U\alpha T\end{matrix}\right\}\Rightarrow P\alpha U\Rightarrow\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}=\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}$$

$$\Rightarrow\frac{3/8-1/2}{1/2-0}=\frac{U_2-U_1}{U_1-0}\xrightarrow{U_2-U_1=3900}$$

$$\frac{۲/۶}{۱/۲}=\frac{۳۹۰۰}{U_۱}\Rightarrow U_۱=۱۸۰۰J$$

روش دوم:

$$\frac{U_۲}{U_۱}=\frac{T_۲}{T_۱}=\frac{P_۲}{P_۱}=\frac{۳۸}{۱۲}=\frac{۱۹}{۶}$$

$$\Delta U=U_۲-U_۱=\frac{۱۹}{۶}U_۱-U_۱=\frac{۱۳}{۶}U_۱=۳۹۰۰\Rightarrow U_۱=۱۸۰۰J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۳۰)

۱۲۵- **گزینهٔ «۳»** *(فراز رسولی)*

می‌دانیم انرژی درونی تابع دمای مطلق گاز است. از طرف دیگر طبق رابطهٔ $PV=nRT$ دمای مطلق با حاصل‌ضرب PV متناسب است. بنابراین:

$$PV\propto T\Rightarrow \left.\begin{matrix}P_AV_A=۴\times\frac{۵}{۴}\\ P_BV_B=۵\times۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow P_AV_A=P_BV_B\Rightarrow T_A=T_B$$

پس در فرایند AB چون دمای ابتدا و انتها با هم برابر است:

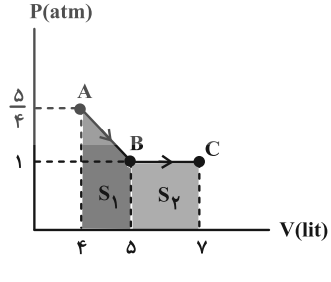
$$U_A=U_B\Rightarrow \Delta U=۰$$

پس با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U_{AB}=۰\Rightarrow \left.\begin{matrix}Q_{AB}=-W_{AB}\\ W_{AB}=-S_۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow Q_{AB}=-W_{AB}=+S_۱$$

$$=\frac{(\frac{۵}{۴}+۱)\times۱۰^۵\times۱\times۱۰^{-۳}}{۲}=\frac{۹۰۰}{۸}=۱۱۲/۵J$$

از طرف دیگر فرایند BC هم‌فشار است و می‌دانیم در این فرایند $\Delta U=۳۰۰J$ است. (با توجه به افزایش حاصل‌ضرب PV، دما و در نتیجه انرژی درونی افزایش یافته):



فرایند BC: $\left.\begin{matrix}\Delta U_{BC}=Q_{BC}+W_{BC}\\ W_{BC}=-S_۲=-۱۰^۵\times(۷-۵)\times۱۰^{-۳}=-۲۰۰J\end{matrix}\right\}$

$$\Rightarrow ۳۰۰=Q_{BC}-۲۰۰\Rightarrow Q_{BC}=۵۰۰J$$

بنابراین کل گرما در فرایند ABC برابر است با:

$$Q_{ABC}=Q_{AB}+Q_{BC}=۶۱۲/۵J$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۵)

۱۲۶- **گزینهٔ «۲»** *(عباس اصغری)*

با توجه به این‌که در هر چرخه $\Delta U=۰$ است، می‌توان نوشت:

$$\Delta U=۰\Rightarrow \Delta U_{AB}+\Delta U_{BC}+\Delta U_{CA}=۰$$

بی‌دررو $\Delta U_{AB}=W_{AB}+Q_{AB}\xrightarrow{Q_{AB}=۰\ \text{بی‌دررو}}$

$$\Delta U_{AB}=W_{AB}=۶۰۰J$$

هم‌دما $\Delta U_{BC}=۰$

هم حجم $\Delta U_{CA}=Q_{CA}+W_{CA}$ ، $W_{CA}=۰$

$$\Rightarrow \Delta U_{CA}=Q_{CA}$$

حال با جاگذاری در رابطهٔ اصلی داریم:

$$۶۰۰+۰+Q_{CA}=۰\Rightarrow Q_{CA}=-۶۰۰J$$

در فرایند CA دستگاه $۶۰۰J$ گرما از دست داده است.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۹ و ۱۴۰)

۱۲۷- **گزینهٔ «۴»** *(مهران اسماعیلی)*

با توجه به این‌که گرمای تلف شده در ماشین گرمایی B، ۲۰ درصد کمتر از ماشین گرمایی A است می‌توان نوشت:

$$|Q_{L_B}|=|Q_{L_A}|-\frac{۲۰}{۱۰۰}|Q_{L_A}|\Rightarrow |Q_{L_B}|=۰/۸|Q_{L_A}|$$

تلاشی درمسیر موفقیت

$$\frac{|Q_{L_B}|}{|Q_{L_A}|} = ۰/۸ = \frac{۴}{۵} \quad (*) \quad \text{یا}$$

از طرفی بنابه تعریف بازده یک ماشین گرمایی داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \xrightarrow[(*)]{|W|=Q_H-|Q_L|} \frac{Q_{H_B}(۱-\eta_B)}{Q_{H_A}(۱-\eta_A)} = \frac{۴}{۵}$$

به ازای سوخت یکسان و در بازه‌های زمانی یکسان $Q_{H_A} = Q_{H_B}$ است

پس می‌توان نوشت:

$$\frac{۱-\eta_B}{۱-\eta_A} = \frac{۴}{۵} \xrightarrow{\eta_A = ۰/۲۵} \frac{۱-\eta_B}{۱-۰/۲۵} = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{۱-\eta_B}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۱-\eta_B = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \eta_B = \frac{۲}{۵} = ۰/۴ \quad \text{یا} \quad ٪۴۰$$

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحهٔ ۱۴۵)

۱۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(کامران ابراهیمی)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ (قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشین گرمایی)

ب) نادرست؛ زیرا در فرایند انبساط هم‌دما می‌توان مقداری گرما را به‌طور کامل به کار تبدیل کرد:

$$\Delta U = ۰ \Rightarrow Q + W = ۰ \Rightarrow Q = -W \ , \ Q = W'$$: فرایند هم‌دما

پ) نادرست؛ در صورت وقوع این امر، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود.

ت) نادرست؛ گرما به‌طور خودبه‌خود امکان ندارد از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود در صورتی که در یخچال می‌توان با انجام کار، مقداری گرما را از منبع دما پایین دریافت کرده (Q_L) و گرمای $|Q_H|$ را به منبع دما بالا داد.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷)

۱۲۹- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

اولاً توجه کنیم که برای یک یخچال علامت Q_H منفی و W و Q_L مثبت است.

ثانیاً زمانی قانون دوم ترمودینامیک برای یخچال نقض می‌شود که گرما به‌طور خودبه‌خود و بدون انجام کار از جسم با دمای پایین‌تر به جسم با دمای بالاتر منتقل شود، یعنی $W = ۰$ باشد.

در گزینهٔ «۲» هم قانون دوم و هم قانون اول نقض شده است. اما در گزینهٔ «۳»، قانون دوم ترمودینامیک نقض می‌شود ولی قانون اول که در اصل پایستگی انرژی است، برقرار است.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۰ و ۱۴۷)

۱۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

علت نادرستی گزینهٔ «۳»: در مرحلهٔ ضربهٔ قدرت، در اثر فشار زیاد مخلوط به سرعت منبسط می‌شود و می‌توان آن را یک انبساط بی‌دررو در نظر گرفت که در نتیجهٔ آن فشار و دمای مخلوط کاهش می‌یابد. گزینه‌های دیگر طبق متن کتاب درسی درست هستند.

(فیزیک ۱- ترمودینامیک؛ صفحه‌های ۱۳۳، ۱۳۷، ۱۴۱ و ۱۴۳)

تلاشی درمسیر موفقیت

شیمی ۳

۱۳۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی موارد نادرست:

ب) در ساختار حلقه‌های ۶ گوشهٔ یخ، پیوندهای هیدروژنی هم موجودند.

ت) HF، Cl_2، CO_2 و C_6H_{14} جزو مواد مولکولی‌اند. اما Cl_2 ترکیب محسوب نمی‌شود.

ث) رفتار فیزیکی مواد مولکولی به نوع و قدرت نیروهای بین مولکولی آن‌ها بستگی دارد.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۳ تا ۷۵)

۱۳۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین مسلمی)*

در ساختار لوویس H_2S، H_2O و CH_4 اتم مرکزی دارای بار جزئی منفی است زیرا خصلت نافلزی آن از اتم‌های جانبی بیشتر است و $COCl_2$ برخلاف CCl_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۷۵)

۱۳۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به این‌که نمی‌دانیم در طی این واکنش V^{5+} چقدر تغییر عدد اکسایش می‌دهد (امکان تبدیل آن به هر یک از یون‌های V^{4+}، V^{3+} و یا V^{2+} وجود دارد)، فرض می‌کنیم در طی واکنش با x درجه تغییر عدد اکسایش مواجه خواهیم شد. به این ترتیب واکنش کلی انجام شده عبارت است از:

$$x\,Zn(s)+2V^{5+}(aq)\rightarrow x\,Zn^{2+}(aq)+2V^{(5-x)+}(aq)$$

حال با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان x را به صورت زیر به دست آورد:

$$500\,mL\ V^{5+}\ محلول \times \frac{1\,L\ V^{5+}\ محلول}{1000\,mL\ V^{5+}\ محلول} \times \frac{0/4\,mol\ V^{5+}}{1\,L\ V^{5+}\ محلول} \times \frac{x\,mol\ Zn}{2\,mol\ V^{5+}} \times \frac{65\,g\ Zn}{1\,mol\ Zn} = 19/5\,g\ Zn$$

$$\Rightarrow x=3$$

به این ترتیب یون V^{5+} به اندازهٔ ۳ درجه تغییر عدد اکسایش پیدا کرده و به محلول V^{2+} تبدیل شده که بنفش رنگ است (رنگ محلول‌های V^{5+}، V^{4+} و V^{3+} به ترتیب زرد، آبی و سبز است.)

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحهٔ ۸۶)

۱۳۴- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) فروپاشی شبکهٔ بلور یک فرایند گرماگیر است و انرژی در آن مصرف می‌شود نه حاصل.

۲) عدد کوئوردیناسیون کاتیون سدیم و آنیون کلرید ۶ است.

۳) وجود سدیم کلرید و دیگر جامدهای یونی در طبیعت نشان می‌دهد که نیروی جاذبه میان یون‌های ناهمنام به نیروی دافعه میان یون‌های همنام غالب است.

۴) چون واکنش تهیه سدیم کلرید گرماده است و با آزاد شدن نور و گرما همراه است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فراورده پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۹، ۸۰ و ۸۲)

۱۳۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین طیبی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نقطهٔ ذوب تیتانیم از فولاد بیشتر است.

مورد دوم: چگالی تیتانیم از فولاد کمتر است در نتیجه حجم یک گرم از تیتانیم نسبت به فولاد بیشتر است.

مورد سوم: واکنش تیتانیم با ذره‌های موجود در آب دریا ناچیز است اما برای فولاد متوسط است.

مورد چهارم: مقاومت در برابر خوردگی تیتانیم از فولاد بیشتر است در نتیجه تمایل به خوردگی کمتری دارد.

مورد پنجم: مقاومت در برابر سایش تیتانیم و فولاد حدوداً به یک اندازه است.

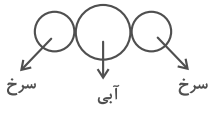
(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۸۷ و ۸۸)

۱۳۶- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زبی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ در مولکول SO_3 اتم مرکزی دارای بار $+\delta$ و در مولکول NH_3 اتم مرکزی دارای بار $-\delta$ است.

مورد دوم: نادرست؛ شعاع اتمی کربن از اکسیژن بیشتر است.

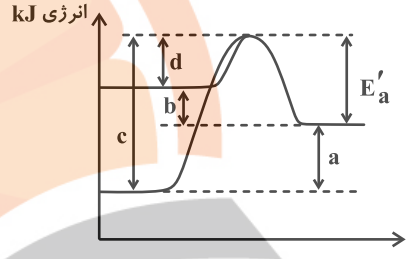


مورد سوم: درست؛ SO_2 دارای مولکول‌های قطبی است و نقطهٔ جوش بالاتری نسبت به مولکول‌های ناقطبی CO_2 دارد، پس در حالت گازی ساده‌تر مایع می‌شود.

مورد چهارم: درست؛ مولکول‌های CO_2 و SO_3 ناقطبی هستند و توزیع الکترون‌ها در آن‌ها متقارن و یکنواخت است اما SO_2 و NH_3 قطبی هستند و توزیع الکترون در مولکول آن‌ها نامتقارن و غیریکنواخت است.

(شیمی ۳- شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری؛ صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۱۳۷- **گزینهٔ «۲»** *(رضا مسکن)*



با توجه به نمودار : $|c|=|a|+|b|+|d|$

چون b عددی منفی می‌باشد در واکنش‌های گرماده آنتالپی عددی منفی است. پس قرینهٔ آن را می‌گذاریم. $\Rightarrow c=a-b+d$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۷ و ۹۸)

۱۳۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

توری پلاتینی و پودر روی کاتالیزگرهای این واکنش هستند. کاتالیزگر با کاهش انرژی فعال‌سازی، سرعت واکنش را بالا می‌برد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) پودر روی باعث انجام واکنشی به صورت سریع می‌شود نه انفجاری.

۳ و ۴) با افزودن کاتالیزگر، ΔH واکنش و سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده بدون تغییر می‌ماند و فقط انرژی فعال‌سازی واکنش کاهش می‌یابد.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۹۹)

۱۳۹- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین مسلمی)*

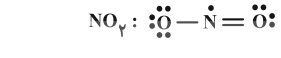
همهٔ عبارت‌ها درست هستند.

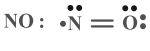
بررسی عبارت‌ها:

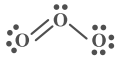
الف) آلاینده‌های A، B و C به ترتیب NO، NO_2 و O_3 است.

NO_2 با اکسیژن هوا در حضور نور خوشید واکنش می‌دهد و O_3 و NO تولید می‌شود.

ب) ساختار لوویس گونه‌ها به صورت زیر است:

NO_2 : 

NO : 

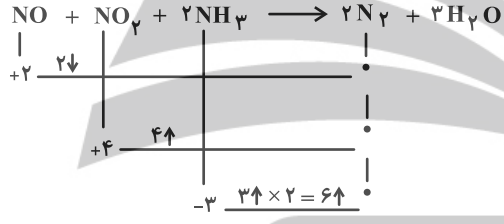
O_3 : 

پ) NO و NO_2 جزو آلاینده‌های خروجی اگزوز خودروها هستند که در واکنش با آمونیاک به نیتروژن و بخارآب تبدیل می‌شوند.

ت) دقت کنید طبق کتاب شیمی ۱ فصل ۳، در شرایط یکسان انحلال‌پذیری CO_2 از NO بیشتر است.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۹۴ و ۱۰۲)

۱۴۰- **گزینهٔ «۱»** *(رضا مسکن)*



در این واکنش ۶ مول الکترون مبادله شده است که تفاوت جرم فراورده‌ها ۲ گرم می‌شود.

$2N_2 = 2\times 28 = 56$

$3\times H_2O = 3\times 18 = 54$

$x\ g$ تفاوت جرم فراورده‌ها $= 1/806\times 10^{24}\ e$

$\times \frac{2g\ \text{تفاوت جرم}}{6/02\times 10^{23}\ e} = 1g$

$\overset{+2}{NO} + \overset{+4}{NO_2} + 2\overset{-3}{NH_3} \rightarrow \underset{\text{صفر}}{2N_2} + 3H_2O$

گونهٔ اکسنده : NO و NO_2

گونهٔ کاهنده : NH_3

تغییر عدد اکسایش N × مول N = مول e

(در کاهنده یا اکسنده)

$?\ mol\ e = 1/806\times 10^{24}\ e \times \frac{1\ mol\ e}{6/02\times 10^{23}\ e} = 3\ mol\ e$

$\rightarrow$ مول N در NH_3 = ۱mol $\rightarrow$ مول N در NH_3 × ۳ = NH_3 ۳

با توجه به فرمول NH_3، مول N = مول NH_3 ۱ mol

$$?g\ N_2 = 1mol\ NH_3 \times \frac{2mol\ N_2}{2mol\ NH_3} \times \frac{28g\ N_2}{1mol\ N_2}$$

$$= 28g\ N_2$$

$$?g\ H_2O = 1mol\ NH_3 \times \frac{3mol\ H_2O}{2mol\ NH_3} \times \frac{18g\ H_2O}{1mol\ H_2O}$$

$$= 27g\ H_2O$$

اختلاف جرم فراورده $= 28(g) - 27(g) = 1g$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۱۰۲)

شیمی ۳- پیشروی سریع

۱۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(میلاد میرحیدری)*

برای تهیهٔ اسید از آلکن، ابتدا باید آلکن را به الکل و سپس به کربوکسیلیک اسید تبدیل کنیم.

تولید اتان از اتن:

$$C_2H_4(g) + H_2(g) \xrightarrow{Ni(s)} C_2H_6(g)$$

تولید اتانول از اتن:

$$C_2H_4(g) + H_2O(l) \xrightarrow{H_2SO_4(aq)} C_2H_5OH(aq)$$

تولید پلی‌اتن از اتن:

$$n\,C_2H_4(g) \xrightarrow{\text{دما و فشار}} \left(C_2H_4\right)_n(s)$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحهٔ ۱۱۴)

۱۴۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

فرمول شیمیایی پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) و پلی استیرن به ترتیب به صورت زیر است:

$$\left(C_8H_8\right)_n \quad \text{و} \quad \left(C_{10}H_8O_4\right)_n$$

$$\overset{C}{} \quad \overset{H}{} \quad \overset{O}{}$$

$$PET: n(10\times12 + 8\times1 + 4\times16) = 3/12\times10^5$$

$$\Rightarrow 192n = 312000 \Rightarrow n = 1625$$

$$\overset{C}{} \quad \overset{H}{}$$

پلی‌استیرن: $n(8\times12 + 8\times1) = 3/12\times10^5$

$$\Rightarrow 104n = 312000 \Rightarrow n = 3000$$

تفاوت شمار واحدهای تکرارشونده برابر است با: $3000 - 1625 = 1375$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶)

۱۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

با توجه به اطلاعات داده شده، فرمول کلی واکنش تجزیه پلی‌استر توصیف شده به صورت زیر است:

$$+(2n)H_2O \rightarrow n\ HOOC-R-COOH + n\ HO-(CH_2)_3-OH$$

ابتدا لازم است جرم مولی واحد تکرارشوندهٔ پلی‌استر (M) را به دست آوریم:

$$38g\ C_3H_8O_2 \times \frac{1mol\ C_3H_8O_2}{76g\ C_3H_8O_2} \times \frac{1mol\ \text{پلی‌استر}}{n\,mol\ C_3H_8O_2}$$

$$\times \frac{n \times M\ g\ \text{پلی‌استر}}{1mol\ \text{پلی‌استر}} = 93g\ \text{پلی‌استر} \Rightarrow M = 186\ g.mol^{-1}$$

حال می‌توان جرم مولی R را با استفاده از جرم مولی پلی‌استر به دست آورد:

فرمول کلی پلی‌استر $= RC_5H_6O_4$

جرم مولی پلی‌استر $= 186 = R + (12\times5) + (1\times6) + (16\times4)$

$$\Rightarrow R = 56$$

به این ترتیب جرم مولی دی‌اسید حاصل از تجزیهٔ این پلی‌استر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

فرمول کلی دی‌اسید $= RC_7H_2O_4$

جرم مولی دی‌اسید $= 56 + (12\times2) + (1\times2) + (16\times4)$

$$= 146\ g.mol^{-1}$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۹)

۱۴۴- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین مسلمی)*

$$n\,C_8H_6O_4 + n\,C_2H_6O_2 \rightarrow (C_{10}H_8O_4)_n + 2n\ H_2O$$

$$?\ g\ C_8H_6O_4 = 9/6g\ (C_{10}H_8O_4)_n \times \frac{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n}{192n\ g(C_{10}H_8O_4)_n}$$

$$\times \frac{n\,mol\ C_8H_6O_4}{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n} \times \frac{166g\ C_8H_6O_4}{1mol\ C_8H_6O_4} = 8/3\ g\ C_8H_6O_4$$

$$?\ g\ C_2H_6O_2 = 9/6g\ (C_{10}H_8O_4)_n \times \frac{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n}{192n\ g(C_{10}H_8O_4)_n}$$

$$\times \frac{n\,mol\ C_2H_6O_2}{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n} \times \frac{62g\ C_2H_6O_2}{1mol\ C_2H_6O_2} = 3/1\ g\ C_2H_6O_2$$

$$?\ C = 9/6g\ (C_{10}H_8O_4)_n \times \frac{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n}{192n\ g(C_{10}H_8O_4)_n}$$

$$\times \frac{8n\,mol\ H}{1mol\ (C_{10}H_8O_4)_n} \times \frac{6\times10^{23}\ H}{1mol\ H} = 2/4\times10^{23}$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۷)

۱۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خوابوی‌مبر)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) هیچ کدام از مونومرهای سازنده این ترکیب (اتیلن گلیکول و ترفتالیک اسید) در نفت خام وجود ندارند.

۲) شمار اتم‌های هیدروژن در $C_8H_6O_4$ ترفتالیک اسید و $C_2H_6O_2$ (اتیلن گلیکول) برابر است.

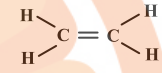
۳) اتیلن گلیکول از واکنش اتن با محلول رقیق پتاسیم پرمنگنات تولید می‌شود.

۴) پلی اتیلن ترفتالات زیست تخریب‌ناپذیر است.

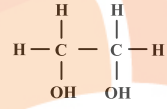
(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۲۰)

۱۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین مسلمی)*

۲− = عدد اکسایش هر اتم کربن در اتن:



۱− = عدد اکسایش هر اتم کربن در اتیلن گلیکول:



هر اتم کربن ۱ درجه اکسایش یافته است.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۷، ۱۱۸ و ۱۲۰)

۱۴۷- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ PET جزو پلیمرهای نفتی است، چون مونومرهای آن غیرمستقیم از نفت ساخته شده‌اند.

ب) نادرست؛ PET دارای چگالی (نسبت جرم به حجم) پایین است.

پ) نادرست؛ پلیمرهایی را که زیست تخریب‌پذیر باشند، سبز گویند.

ت) نادرست؛ در بازیافت PET با واکنش متانول با آن، آن را به مونومرهای سازنده‌اش تجزیه نمی‌کنیم، بلکه از مواد مفید به دست آمده برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنیم.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۹ و ۱۲۰)

۱۴۸- **گزینهٔ «۲»** *(امیر حاتمیان)*

موارد (الف) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) درواقع یک واکنش شیمیایی هنگامی به صرفه‌تر است که تعداد بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فراورده سودمند تبدیل گردد.

ب) چون پارازایلن یک هیدروکربن ناقطبی است و نسبت $\frac{\text{مقدار C}}{\text{مقدار O}}$ در ترفتالیک اسید بیشتر از اتیلن گلیکول است پس غلبه بخش قطبی در اتیلن گلیکول بیشتر است. میزان انحلال‌پذیری ترفتالیک اسید در آب بیشتر از پارازایلن ولی کمتر از اتیلن گلیکول است. نسبت مول با نسبت تعداد ذره‌ها برابر است.

پ)

نفتالن: $1\,C_{10}H_8 \sim 10\,C$

$0/2\,mol \quad 0/2\times10\,mol=2\,mol$

پارازایلن: $1\,C_8H_{10} \sim 10\,H$

$0/05\,mol \quad 10\times0/05=0/5\,mol$

ت) زباله‌های ساخته شده از PET را می‌توان با متانول واکنش داده و مواد مفیدی تهیه کرد که برای تولید پلیمرها قابل استفاده باشند.

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۲۰ و ۱۲۱)

۱۴۹- **گزینهٔ «۴»** *(رضا مسکن)*

$$(I)\ CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3H_2$$

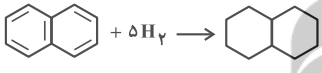
$$(II)\ CO + 2H_2 \rightarrow CH_3OH$$

با توجه به واکنش‌ها به ازای یک مول متان ۱ مول هیدروژن اضافی می‌ماند.

$$x\,mol\ H_2 \text{ اضافه می‌ماند} = 8000\,g\ CH_4$$

$$\times\frac{1\,mol\,CH_4}{16\,g}\times\frac{1\text{ اضافی } H_2}{1\,mol\ CH_4}$$

$$x = 500\,mol\ H_2$$



$$x\,g\ C_{10}H_8 = 500\,mol\ H_2\times\frac{1\,mol\ C_{10}H_8}{5\,mol\ H_2}\times\frac{128\,g\ C_{10}H_8}{1\,mol}$$

$$= 12800\,g$$

(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱)

۱۵۰- **گزینهٔ «۳»** *(امیر حاتمیان)*

دمای $\theta_1 = 450^\circ C - 550^\circ C$ و $\theta_2 = 350^\circ C$ است. پس داریم:

$\theta_1 > \theta_2$: دما

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) واکنش در حضور کاتالیزگر، دمای $350^\circ C$ و فشار $30-50$ اتمسفر انجام می‌شود.

۲) فشار در نقطهٔ p بین $30-50\,atm$ متغیر است:

$$50-30 = 20\,atm$$

۴) $A : H_2O(g)$

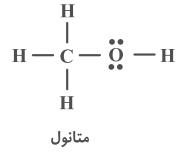
(شیمی ۳- شیمی، راهی به سوی آینده‌ای روشن‌تر؛ صفحه‌های ۱۲۰ و ۱۲۱)

نشانی در مسیر موفقیت

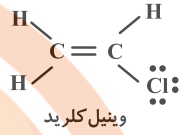
شیمی ۲

۱۵۱- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

نخستین عضو خانواده الکل‌ها متانول است.



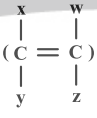
متانول



وینیل‌کلرید

ویژگی	متانول	وینیل‌کلرید
شمار جفت e پیوندی	۵	۶
شمار جفت e ناپیوندی	۲	۳
شمار اتم‌های سازنده	۶	۶
شرکت در واکنش پلیمری شدن	×	✓

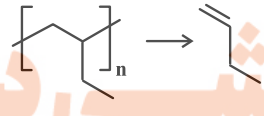
فقط شمار اتم‌های سازنده در هر دو مولکول مشابه است. الکل‌های دوعاملی در واکنش پلیمری شدن شرکت می‌کنند. پس متانول چنین توانایی ندارند.

ترکیب‌های دارای پیونددوگانه کربن- کربن  در واکنش پلیمری شدن شرکت می‌کنند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۰۴)

۱۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

برای تعیین مونومر سازنده تنها کافی است که دو پیوند خارج شده از کروشه را پاک کرده و به جای آن یک پیوند دوگانه میان دو اتم کربن قرار دهیم.



بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ زیرا نام مونومر ۱- بوتن است.

۲) نادرست؛ پلی‌پروپن در ساخت تجهیزات پزشکی و سرنگ کاربرد دارد.

۳) نادرست؛

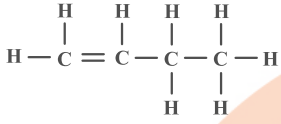
$$(C_4H_8)_n + 6nO_2 \rightarrow 4nCO_2 + 4nH_2O$$

$$?\,mol\ CO_2 = 1\,mol\ (C_4H_8)_n \times \frac{4n\ mol\ CO_2}{1\,mol\ (C_4H_8)_n}$$

$$= 4n\ mol\ CO_2$$

مول CO_2 تولید شده به تعداد واحدهای تکرارشونده وابسته است.

۴) درست

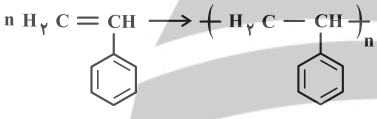


$$\frac{\text{تعداد پیوند اشتراکی}}{\text{تعداد اتم‌ها}} = \frac{12}{12} = 1$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۰۴)

۱۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین طیبی)*

پلیمری شدن استیرن و تبدیل شدن به پلی‌استیرن:



توجه داشته باشید که در ساختار استیرن ۴ پیوند دوگانه و در ساختار پلی‌استیرن ۳ پیوند دوگانه یافت می‌شود.

$$?\,mol\ \text{پیوند دوگانه} : 13\ kg(C_8H_8)_n \times \frac{10^3\,g}{1\,kg}$$

$$\times \frac{1\,mol\ (C_8H_8)_n}{104n\ g\ (C_8H_8)_n} \times \frac{n\,mol\ C_8H_8}{1\,mol\ (C_8H_8)_n} \times \frac{4\,mol\ \text{پیوند دوگانه}}{1\,mol\ C_8H_8}$$

$$\text{پیوند دوگانه} = 3/01\times10^{26}\ \text{پیوند دوگانه} \times \frac{6/02\times10^{23}\ \text{پیوند دوگانه}}{1\,mol\ \text{پیوند دوگانه}}$$

پلی‌اتن شاخه‌دار، پلی‌اتن سبک محسوب می‌شود و چگالی ۰/۹۲ گرم بر میلی‌لیتر دارد. فرمول مولکولی پلی‌اتن $(C_2H_4)_n$ است.

$$?\ L\ (C_2H_4)_n : 3/01\times10^{26}\ \text{واحد تکرارشونده}$$

$$\times \frac{28n\ g\ (C_2H_4)_n}{1\,mol\ \text{واحد تکرارشونده}} \times \frac{1\,mol\ \text{واحد تکرارشونده}}{6/02\times10^{23}\ \text{واحد تکرارشونده}}$$

$$\times \frac{1\,mL\ (C_2H_4)_n}{0/92\,g(C_2H_4)_n} \times \frac{1\ L}{10^3\,mL\ (C_2H_4)_n} \simeq 15/2\ L$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۷)

تلاشی درمسیر موفقیت

۱۵۴- **گزینهٔ «۳»** *(حمید زبحی)*

بررسی موارد:

مورد اول: نادرست؛ $-OH$ گروه عاملی هیدروکسیل است نه هیدروکسید.

مورد دوم: نادرست؛ پرکابردترین اسید آلی در زندگی روزمره اتانوئیک اسید (استیک اسید) است نه متانوئیک اسید.

مورد سوم: درست؛ با افزایش تعداد کربن جرم مولی الکل بیشتر می‌شود و درصد جرمی اکسیژن آن کاهش می‌یابد. با بزرگ شدن بخش ناقطبی و نزدیک شدن انحلال‌پذیری به صفر تفاوت انحلال‌پذیری بین دو الکل متوالی نیز کمتر می‌شود.

مورد چهارم: نادرست؛ با افزایش تعداد C جرم مولی الکل‌ها افزایش می‌یابد، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب کاهش یافته و به میزان انحلال‌پذیری آلکان‌ها در آب نزدیک‌تر می‌شود.

مورد پنجم: درست؛ با افزایش تعداد C جرم مولی الکل بیشتر شده و بخش ناقطبی بر بخش قطبی غالب می‌شود، پس قدرت نیروهای جاذبهٔ وان‌درووالسی میان مولکول‌های الکل قوی‌تر شده و بر جاذبهٔ هیدروژنی غلبه می‌کنند.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۱)

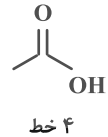
۱۵۵- **گزینهٔ «۴»** *(حمید زبحی)*

برای این ترکیب یک ساختار کربوکسیلیک اسیدی و یک ساختار استری می‌توان رسم کرد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) در ساختار استرها میان مولکول‌ها پیوند هیدروژنی وجود ندارد.

۲) اگر این مولکول استیک اسید باشد، از ۴ خط استفاده می‌کنیم.



۴ خط

۳) شمار جفت الکترون‌های پیوندی آن (۸ جفت) دو برابر شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی آن (۴ جفت) است نه شمار الکترون‌های ناپیوندی.

۴) نسبت درصد جرمی کربن به اکسیژن برابر ۰/۷۵ است.

$$\frac{\text{درصد جرمی C}}{\text{درصد جرمی O}}=\frac{\frac{\text{C جرم}}{\text{}C_2H_4O_2\text{ جرم}}\times 100}{\frac{\text{O جرم}}{\text{}C_2H_4O_2\text{ جرم}}\times 100}=\frac{\text{C جرم}}{\text{O جرم}}$$

$$=\frac{2\times 12}{2\times 16}=0/75$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۱۲)

۱۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

مادهٔ A: بوتانوئیک اسید $(C_4H_8O_2)$

مادهٔ B: اتانول (C_2H_5OH)

مادهٔ C: آب (H_2O)

بررسی گزینه‌ها:

۱)

$$\text{درصد جرمی C در اتانول}=\frac{\text{C جرم}}{\text{}C_2H_5OH\text{ جرم}}\times 100$$

$$=\frac{(2\times 12)}{(2\times 12)+(6\times 1)+(1\times 16)}\times 100=\frac{24}{46}\times 100\simeq 52\%>50\%$$

اتانول به هر نسبت در آب حل می‌شود.

۲) $C_4H_8O_2$ دارای ۱۴ اتم و متانول (CH_3OH) دارای ۶ اتم است.

۳) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در اتیل بوتانوات $(C_6H_{12}O_2)$ با این نسبت در بوتانوئیک اسید و $(C_4H_8O_2)$ است.

۴) واکنش H_2O با C_2H_4 (ساده‌ترین آلکن) منجر به تولید C_2H_5OH می‌شود.

$$C_2H_4+H_2O\xrightarrow{H_2SO_4}C_2H_5OH$$

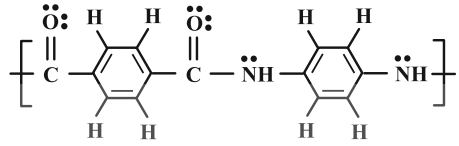
(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۴)

۱۵۷- **گزینهٔ «۴»** *(روزبه رضوانی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ واحد تکرارشوندهٔ آن به صورت زیر است:

تلاشی درمسیر موفقیت



۲) نادرست؛

$$\frac{\text{جفت الکترون ناپیوندی}}{\text{تعداد اتم هیدروژن}} = \frac{۶}{۱۰}$$

۳) نادرست؛ با توجه به این‌که جرم مولی $(NH_۲)$ از جرم مولی $(COOH)$ کمتر است. آمین دوعاملی، مونومر سبک‌تر است. پلی‌استرها از واکنش دی‌اسید و دی‌الکل به دست می‌آیند و دی‌آمین‌ها در این واکنش نقشی ندارند.

۴)

$$C_{۱۴}H_{۱۰}N_۲O_۲ : (۱۴\times۱۲)+(۱۰\times۱)+(۲\times۱۴)+(۲\times۱۶)$$

$$= ۲۳۸ g.mol^{-۱}$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۳ و ۱۱۵)

۱۵۸- **گزینهٔ «۲»** *(رضا مسکن)*

در واکنش آبکافت استر:

الکل + اسید ⟶ آب + استر

طبق قانون پایستگی جرم، مجموع جرم فراورده‌های آلی، برابر است با مجموع جرم آب و استر.

محاسبهٔ جرم استر:

$$?g\ C_۵H_{۱۰}O_۲ = ۰/۱ mol\ C_۵H_۸O_۲ \times \frac{۱۰۲ g\ C_۵H_{۱۰}O_۲}{۱ mol\ C_۵H_{۱۰}O_۲}$$

$$= ۱۰/۲ g\ C_۵H_{۱۰}O_۲$$

محاسبهٔ جرم آب:

$$?\ g\ آب = ۰/۱\ mol\ استر \times \frac{۱ mol\ آب}{۱ mol\ استر} \times \frac{۱۸ g\ آب}{۱ mol\ آب} = ۱/۸ g\ H_۲O$$

$$\text{مجموع جرم فراورده‌های آلی} = ۱۰/۲g + ۱/۸g = ۱۲g$$

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۱۷)

۱۵۹- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

موارد اول، سوم و پنجم به درستی بیان شده‌اند.

بررسی موارد:

مورد دوم: نادرست؛ پلیمرهای هیدروکربنی پلیمر سبز نیستند و تا مدت‌ها در طبیعت باقی می‌مانند.

مورد چهارم: نادرست؛ اگر پلیمرهای سبز در طبیعت رها شوند، پس از چند ماه به مولکول‌های ساده مثل آب و کربن دی‌اکسید تبدیل می‌شوند.

مورد پنجم: درست؛ ابتدا از فراورده‌های کشاورزی، نشاسته به دست می‌آورند که یک پلیمر طبیعی است. سپس نشاسته را به لاکتیک اسید تبدیل می‌کند که یک کوچک مولکول با خاصیت اسیدی است، از پلیمری شدن لاکتیک اسید پلی‌لاکتیک اسید به دست می‌آید.

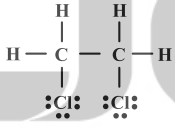
(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)

۱۶۰- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

در واکنش گاز اتن با $Cl_۲$، $FeCl_۳$ یعنی آهن (III) کلرید نقش کاتالیزگر را دارد، پس عبارت داده شده، نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) در ساختار فراوردهٔ واکنش:



۷ جفت الکترون پیوندی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد و اختلاف آن‌ها برابر با ۱ است.

۲) با توجه به ساختار لوویس فراورده، تمام اتم‌ها به آرایش گاز نجیب هم‌دوره خود رسیده‌اند.

۳) قرار گرفتن گرمای واکنش در سمت فراورده‌ها نشان از گرماده بودن این واکنش است. در واکنش‌های گرماده انرژی توسط سامانه آزاد می‌شود نه مصرف.

۴) پیوند $C-C$ یگانه در فراورده نشان از سیر شده بودن آن است.

(شیمی ۲- پوشاک، نیازی پایان‌ناپذیر؛ صفحهٔ ۱۲۱)

تلاشی درمسیر موفقیت

شیمی ۱

۱۶۱- **گزینهٔ «۲»** (امیر حاتمیان)

راه‌حل اول: مقدار جرم نمک موجود در محلول اولیه را برحسب گرم به دست می‌آوریم:

$$?\,g\ \text{نمک} = 1/5\,kg\ \text{محلول} \times \frac{1000\,g\ \text{محلول}}{1\,kg\ \text{محلول}} \times \frac{20\,g\ \text{نمک}}{100\,g\ \text{محلول}}$$

$$= 300\,g\ \text{نمک}$$

مقدار آب موجود در محلول ← $1500 - 300 = 1200\,g$ آب

انحلال‌پذیری این نمک در دمای $60^\circ C$ برابر ۸۰ است. یعنی به ازای هر ۱۰۰ گرم از حلال (آب)، حداکثر ۸۰ گرم از این نمک حل می‌شود. حال باید حساب کنیم که به ازای ۱۲۰۰ گرم آب حداکثر چقدر نمک دیگر می‌تواند در محلول حل شود تا محلول سیرشده حاصل شود. یعنی حداکثر جرم نمک قابل حل را محاسبه کنیم و جرم نمک موجود در محلول را از آن کم کنیم.

$$\text{بیشترین مقدار نمک} = 1200\,g\ \text{آب} \times \frac{80\,g\ \text{نمک}}{100\,g\ \text{آب}} = 960\,g\ \text{نمک}$$

$$960 - 300 = 660\,g\ \text{جرم نمکی که می‌توان اضافه کرد}$$

پس حداکثر $660\,g$ نمک دیگر را می‌توان در محلول حل کرد.

راه‌حل دوم: در محلول سیرشده، حداکثر مقدار حل‌شونده ممکن در حلال حل شده است. پس برای محاسبهٔ جرم حل‌شونده‌ای که می‌توان به محلول اضافه کرد باید جرم حل‌شونده حل شده در محلول سیرشده را از جرم حل‌شونده موجود در محلول کم کرد.

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم محلول}} \times 100 \Rightarrow 20 = \frac{\text{جرم نمک}}{1500\,g} \times 100$$

$$\Rightarrow \text{جرم نمک} = 300\,g$$

محاسبهٔ جرم نمک حل شده در محلول سیر شده در دمای $60^\circ C$: باید ابتدا جرم موجود در محلول را به دست آوریم:

$$\text{جرم محلول} = \text{جرم نمک} + \text{جرم آب}$$

$$\Rightarrow 1500\,g = 300\,g + \text{جرم آب} \Rightarrow \text{جرم آب} = 1200\,g$$

$$\frac{\text{انحلال‌پذیری}}{100} = \frac{\text{جرم نمک}}{\text{جرم آب}} \Rightarrow \frac{80}{100} = \frac{\text{جرم نمک}}{1200}$$

$$\Rightarrow \text{جرم نمک} = 960\,g$$

$$960 - 300 = 660\,g\ \text{حداکثر جرم نمکی که می‌توان به محلول اضافه کرد}$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۱۶۲- **گزینهٔ «۳»** (امیر حاتمیان)

چون انحلال‌پذیری عددی بین ۰/۰۱ و ۱ است $(0/01 \le S < 1)$ در ۱۰۰ گرم آب است در نتیجه ترکیب مورد نظر کم محلول می‌باشد.

با استفاده از استوکیومتری مقدار انحلال‌پذیری (گرم حل‌شونده در ۱۰۰ گرم حلال) کلسیم را به دست می‌آوریم. سپس به غلظت ppm تبدیل می‌کنیم:

$$\underset{0/21g}{CaSO_4} \rightarrow \underset{?\,g}{Ca^{2+}} + SO_4^{2-}$$

دقت داشته باشید مقدار محلول بر غلظت مواد بی‌تاثیر است.

$$\underbrace{?\,g\ Ca^{2+}}_{\text{انحلال‌پذیری } Ca^{2+}} = 0/21g\ CaSO_4 \times \frac{1mol\ CaSO_4}{136g\ CaSO_4} \times \frac{1mol\ Ca^{2+}}{1mol\ CaSO_4} \times \frac{40g\ Ca^{2+}}{1mol\ Ca^{2+}} \simeq 0/0618$$

نقشه راه‌حل تبدیل انحلال‌پذیری Ca^{2+} به غلظت ppm آن:

$$S_{Ca^{2+}} \xrightarrow{a=\frac{100S}{100+S}} \%d_{Ca^{2+}} \xrightarrow{ppm=d\times10^4} ppm_{Ca^{2+}}$$

$$\%d_{Ca^{2+}} = \frac{100 \times 0/0618}{100 + \underbrace{0/0618}_{\text{قابل صرف نظر کردن}}} \Rightarrow d_{Ca^{2+}} \simeq 0/0618$$

$$ppm = 0/0618 \times 10^4 = 618$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۳)

۱۶۳- **گزینهٔ «۴»** (هادی مهدی‌زاده)

با توجه به این‌که جرم آب در هر چهار ظرف یکسان است و تغییر حجم هم رخ نداده، پس در رابطهٔ چگالی حجم ثابت می‌ماند و هر چه جرم بیشتر باشد، چگالی بیشتر خواهد بود. بنابراین هر ترکیبی که در دمای $20^\circ C$ انحلال‌پذیری بیشتر داشته باشد، جرم و چگالی آن بیشتر است.

انحلال‌پذیری و چگالی در دمای $20^\circ C$:

$$NaNO_3(B) > KNO_3(A) > K_2Cr_2O_7(D) > KClO_3(C)$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۰۲)

۱۶۴- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا پورجاوید)

در مورد مولکول‌های قطبی عواملی مانند میزان قطبیت مولکول، مقدار نیروهای جاذبهٔ بین ذرات و جرم مولی بر روی نقطهٔ جوش تأثیرگذار هستند. اما در مورد مولکول‌های ناقطبی تنها جرم مولی چنین نقشی را ایفا می‌کند (بنابراین بین آن‌ها یک عامل مشترک (یعنی جرم مولی) وجود دارد.)

در گروه هالوژن‌ها، F_2 و Cl_2 در حالت گازی بوده و Br_2 و I_2 به ترتیب مایع و جامد هستند. از آنجا که گشتاور دوقطبی هیدروکربن‌ها برابر با صفر است، استفاده از این پارامتر برای بررسی روند تغییرات نقطهٔ جوش مناسب نیست. نیروی غالب بین مولکول‌های HF، پیوند هیدروژنی و نیروی بین مولکول‌های HBr تنها نیروی وان‌دروالسی است. به همین دلیل نقطهٔ جوش HF که نیروی بین مولکولی قوی‌تری دارد، بالاتر است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶، ۱۰۷ و ۱۰۹)

۱۶۵- **گزینهٔ «۳»** (پیمان خوابوی‌مجد)

فقط عبارت (آ) نادرست است.

بررسی موارد:

آ) مخلوط ید در هگزان بنفش رنگ است.

ب) اتانول (C_2H_6O) در مقایسه با استون (C_3H_6O) جرم مولی کمتری دارد اما به دلیل توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

پ) در فرمول شیمیایی C_6H_{14}، ۲۰ اتم و در فرمول شیمیایی C_3H_6O، ۱۰ اتم وجود دارد.

ت) اتانول به عنوان حلال مواد دارویی، آرایشی و بهداشتی کاربرد دارد و به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

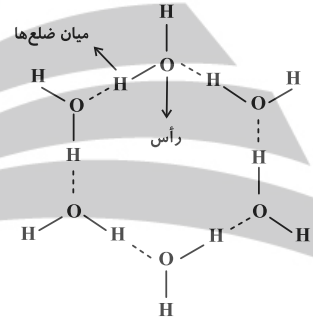
(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۹)

۱۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(حمید زبحی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست؛ میان مولکول‌های آب پیوند اشتراکی وجود ندارد.

۲) درست؛ ساختار یخ به صورت زیر است:



در این ساختار اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های شش‌ضلعی قرار می‌گیرند و شبکه‌ای مانند کندوی عسل به وجود می‌آورند.

۳) نادرست؛ در ساختار آب به حالت مایع، مولکول‌ها به صورت نامنظم روی هم می‌لغزند.

۴) نادرست؛ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها به مراتب قوی‌تر از پیوند هیدروژنی بین مولکول‌ها است. چون در اثر حرارت ابتدا پیوند هیدروژنی بین مولکول‌ها شکسته می‌شود و در حالت بخار همچنان پیوندهای اشتراکی برقرار هستند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۰۸)

۱۶۷- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا پورجاوید)*

برای ترکیب‌هایی که در آب حل نمی‌شوند، نیروی جاذبه یون- دوقطبی در مخلوط به دست آمده از میانگین قدرت پیوندی یونی و پیوندی هیدروژنی کوچک‌تر خواهد بود. در میان ترکیب‌های داده شده $AgCl$ و $BaSO_4$ چنین شرایطی دارد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۱۱)

۱۶۸- **گزینهٔ «۴»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

مولکول‌های آب از منافذ غشا نیمه‌تراوا (با توجه به شکل فقط مولکول‌های آب از غشا عبور می‌کنند. افزایش حجم مایع باعث می‌شود محلول سدیم کلرید بالا بیاید، سرریز شود و به داخل آب بریزد. عبور مولکول‌های آب از غشا باعث رقیق شدن محلول در قسمت A و کاهش مولاریتهٔ آن می‌شود. پس عبارت «آ» نادرست است. با پیشرفت فرایند و رقیق شدن محلول A، همچنین سرریز شدن قطره‌ها در مخزن B، غلظت محلول B زیاد می‌شود. این فرایند تا مساوی شدن غلظت محلول A و B ادامه می‌یابد. پس عبارت «ب» درست است. این فرایند اسمز نام دارد که همانند متورم شدن حبوبات و میوه‌های خشک به صورت خودبه‌خودی و بدون مصرف انرژی صورت می‌گیرد. پس عبارت «پ» درست است. اگر در مخزن B، محلول آب نمک غلیظ‌تر محلول A داشته باشیم، جریان آب از محلول A به سوی محلول B از غشای نیمه‌تراوا برقرار می‌شود. در نتیجه حجم محلول A دیگر زیاد نمی‌شود تا با بالا رفتن مایع، قطره‌های C سرریز شود. پس مورد «ت» درست است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۸)

۱۶۹- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

مطابق قانون هنری و نمودار صفحهٔ ۱۱۵ کتاب درسی با n برابر شدن فشار انحلال‌پذیری گاز n برابر می‌شود. پس با کاهش فشار از ۹atm به ۴/۵atm، انحلال‌پذیری O_2 از ۰/۰۴ به ۰/۰۲ گرم می‌رسد. پس می‌توان جرم O_2 را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$5000g\ H_2O \times \frac{0/02g\ O_2}{100g\ H_2O} = 1g\ O_2$$

محاسبهٔ جرم $KClO_3$:

$$1g\ O_2 \times \frac{1mol\ O_2}{32g\ O_2} \times \frac{2mol\ KClO_3}{3mol\ O_2} \times \frac{122/5g\ KClO_3}{1mol\ KClO_3}$$

$$\simeq 2/55g$$

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحهٔ ۱۱۵)

۱۷۰- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا کیانی‌دوست)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست؛ زیرا این روش به اسمز معکوس اشاره دارد که کارایی آن از روش تقطیر بیشتر است. چون در این روش برخلاف تقطیر، ترکیب‌های آلی فرّار هم از آب جدا می‌شوند.

۲) درست؛ محلول خروجی از C غلیظ‌تر از ورودی A است.

۳) درست، با توجه به این‌که اسمز معکوس فرایندی غیرخودبه‌خودی است برای انجام آن از فشار مکانیکی توسط یک پمپ استفاده می‌شود.

۴) نادرست؛ زیرا در فرایند اسمز معکوس، به دلیل فشار ایجاد شده توسط پمپ، مولکول‌های آب از محیط غلیظ به سمت محیط رقیق حرکت می‌کنند.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۱۱۸ و ۱۱۹)